СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Н. Н. БОГОЛЮБОВ,
Б. В. МЕДВЕДЕВ,
М. К. ПОЛИВАНОВ

Вопросы теории дисперсионных соотношений

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи математических наук»*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Б. В. МЕДВЕДЕВ,
М. К. ПОЛИВАНОВ

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

11-5-4

АННОТАЦИЯ

Монография содержит детальное изложение математической структуры нового метода квантовой теории поля — дисперсионных соотношений. В своей математической части она касается вопросов, лежащих на грани теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных.

Книга может быть рекомендована как лицам, желающим познакомиться с теорией дисперсионных соотношений, так и тем, кто, работая в этой области, хочет понять математическую структуру метода. Читатель должен быть знаком с основными представлениями квантовой теории поля.

Посвящаем памяти
нашего трагически погибшего товарища
Владимира Залмановича Бланка

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография была задумана и в основном написана нами еще в 1956 году как детальное изложение, — более близкое по стилю к учебнику, чем к научной статье, — метода дисперсионных соотношений и близко связанных с ним вопросов спектральных представлений функций Грина. В частности, центральный пункт — доказательство существования дисперсионных соотношений для рассеяния π-мезонов на нуклонах — был доложен одним из нас (Н. Н. Б.) на международной конференции в Сиаттле в сентябре 1956 г. Рукопись была окончательно подготовлена и сдана в издательство в начале 1957 г.

Естественно, что за прошедшие с тех пор почти полтора года рассматриваемая молодая область науки сильно развилась и продвинулась вперед. В первую очередь здесь нужно отметить распространение метода дисперсионных соотношений на целый ряд других процессов рассеяния (в частности, на процессы с переменным числом частиц, в которых возникают специфические осложнения), с одной стороны, и появившиеся в самое последнее время новые идеи в вопросе доказательства — с другой. Однако основной метод остался прежним и все указанные работы существенно опираются на изложенный в монографии материал в частности, на ряд математических теорем из дополнения А.

Ясно, что для того, чтобы охватить все новые работы, понадобилось бы написать еще один том. Поэтому авторы сочли целесообразным не вносить в книгу никаких скороспелых дополнений, а опубликовать ее в ее настоящем виде. Читателю, интересующемуся дальнейшим развитием метода, придется, прочитав книгу, обратиться к журналам и препринтам см., напр., [28] — [35]).

Авторы пользуются случаем, чтобы поблагодарить сотрудников отдела Теоретической физики Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и лаборатории Теоретической физики Объединенного института ядерных исследований за замечания и предложения. Мы особенно благодарны редактору книги Д. В. Ширкову, а также В. С. Владимирову, с которым мы подробно обсуждали многие затронутые в книге математические вопросы.

Н. Н. Боголюбов,
Б. В. Медведев,
М. К. Поливанов

Москва, май 1958

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. В последнее время в квантовой теории поля наметилось новое, представляющееся весьма перспективным, направление, связанное с так называемыми *дисперсионными соотношениями*, т. е. соотношениями между эрмитовой частью амплитуды рассеяния и определенного рода интегралом по энергии от ее антиэрмитовой части. Такие соотношения возникают в известной степени вне зависимости от конкретных деталей рассматриваемой теории; существенным для их получения оказывается в основном лишь требование микроскопической причинности, формулировавшееся в большинстве работ в виде требования обращения в нуль коммутаторов полевых величин в пространственноподобных точках. Именно этот общий характер дисперсионных соотношений, с одной стороны, и то, что они связывают величины, поддающиеся непосредственному измерению (что нетривиально для квантовой теории поля), — с другой, обуславливают большой интерес, вызываемый подобными исследованиями не только со стороны теоретиков, но и со стороны экспериментаторов.

Несмотря на то, что литература по дисперсионным соотношениям насчитывает уже не один десяток названий и что написаны и сравниваются с опытом дисперсионные соотношения для ряда конкретных физических процессов, однако до сих пор не был предложен способ получения этих соотношений, удовлетворяющий хотя бы обычным для физических работ требованиям строгости: уже одно обилие различных путей их получения, предлагаемых иногда одними и теми же авторами, указывает на неблагополучие в обосновании всего направления. Кроме того, до сих пор остается открытым вопрос о физических допущениях, реально необходимых для получения дисперсионных соотношений и вопрос о том, в какой степени дисперсионные соотношения связаны с современной схемой квантовой теории поля или насколько можно обобщить теорию, не нарушив их справедливости.

1.2. Именно этим двум проблемам и посвящено настоящее исследование.

В § 2 мы сформулируем те основные положения, которые следует, по нашему мнению, заимствовать у обычной теории, чтобы сделать возможным вывод дисперсионных соотношений. В остальном построение теории может быть произвольным; в частности, нам не понадобится ни фиксировать вида лагранжиана (или вообще выписывать его явно), ни прибегать к гамильтонову методу.

Основными величинами, с которыми мы будем работать, будут вариационные производные матрицы рассеяния по полям реальных частиц — так называемые *радиационные операторы*. § 3 будет посвящен установлению некоторых общих соотношений между такими операторами. Изучение радиационных операторов тесно связано с изучением функций Грина для реальных частиц. Поэтому §§ 4 и 5 будут отведены новому выводу известных спектральных представлений Челлена — Лемана. Этот вывод будет основан на изучении свойств аналитичности вакуумных матричных элементов соответствующих радиационных операторов и обладает тем преимуществом, что нигде, даже и на промежуточных этапах, не будут появляться расходящиеся выражения.

Наконец, §§ 6, 7 и дополнение А посвящены выводу и доказательству самих дисперсионных соотношений, а § 8 — их детализации для конкретных процессов рассеяния.

1.3. Заметим, что сами по себе дисперсионные соотношения отнюдь не являются в физике чем-то новым, и различные их виды были известны уже до создания квантовой теории поля. Еще в 1926—1927 гг. Крониг [1] и Крамерс [2] получили в классической электродинамике дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частями показателя преломления,

$$\operatorname{Re}[n(\omega)-n(0)] = P\int_0^\infty \frac{2\omega^2 \operatorname{Im} n(\omega')}{\pi\omega'(\omega'^2-\omega^2)}\,d\omega', \tag{1.1}$$

также обусловленное тем обстоятельством, что сигналы не могут распространяться со скоростью, большей скорости света. В настоящее время различные формы дисперсионных соотношений широко используются в ряде разделов радиотехники.

Основным математическим средством для получения дисперсионных соотношений является известная интегральная формула Коши. Поскольку в квантовой теории поля фактически приходится в ряде случаев иметь дело с обобщенными функциями, то, применяя эту теорему, нужно соблюдать определенную осторожность. Поэтому, прежде чем продолжать наш исторический обзор, сделаем некоторые замечания математического характера, которые облегчат понимание дальнейшего.

1.4. Пусть мы имеем функцию $f(E)$, аналитическую в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} E > 0$), со свойствами:

а) *для любого положительного* δ *можно указать такую постоянную* $A(\delta)$, *что*

$$|f(E)| \leqslant \frac{A(\delta)}{|E|} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} E > \delta; \tag{1.2}$$

б) *когда* $\operatorname{Im} E \to 0$, *функция* $f(E)$ *стремится в несобственном смысле к функции, интегрируемой в классе* $C\ (q,\ 1)$[1].

Построим теперь замкнутый контур, образованный отрезком $(i\delta - R,\ i\delta + R)$ и полуокружностью радиуса R, лежа-

[1]) В настоящей работе мы используем определение обобщенных функций, восходящее к С. Л. Соболеву.

Вводится класс $C\ (q, r; n)$ (часто обозначаемый через $C\,(q,\ r)$ в тех случаях, когда значение индекса n очевидно) функций $h\,(x_1, \ldots, x_n)\,(-\infty < x_j < +\infty)$, непрерывных и обладающих непрерывными частными производными до q-го порядка включительно. При этом предполагается, что все выражения вида

$$\left| x_j^m \frac{\partial^s h\,(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} \right|$$

$$(0 \leqslant m \leqslant r,\ 0 \leqslant s \leqslant q,\ -\infty < x_j < +\infty)$$

ограничены.

Этот класс рассматривается как линейное банаховское пространство с нормой

$$\| h \| = \sup \left| x_j^m \frac{\partial^s h}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_s}} \right|$$

$$(0 \leqslant m \leqslant r,\ 0 \leqslant s \leqslant q,\ -\infty < x_j < +\infty).$$

Линейные функционалы $l\,(h)$, определенные в данном пространстве, щей в верхней полуплоскости. Так как в силу свойства а) интеграл от $\frac{f(E')}{E'-E}$ по этой полуокружности будет (при $R\to\infty$) стремиться к нулю, то из теоремы Коши следует, что

$$f(E)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty}\frac{f(E')}{E'-E}\,dE' \qquad (\operatorname{Im}E>\delta>0).$$

Приняв во внимание свойство б), мы сможем сместить здесь путь интегрирования на вещественную ось, устремив $\delta\to 0$, и написать

$$f(E)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(E')}{E'-E}\,dE' \qquad (\operatorname{Im}E>0). \qquad (1.3)$$

Переведем теперь на вещественную ось также точку E ($\operatorname{Im}E\to 0$) и заметим, что для вещественных E и E' имеет место символическое тождество:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{1}{E'-E-i\varepsilon}=P\left(\frac{1}{E'-E}\right)+i\pi\delta(E'-E). \qquad (1.4)$$

условимся символически представлять в виде

$$I(h)=\int K(x_1,\ldots,x_n)\,h(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

«Ядро» $K(x_1,\ldots,x_n)$ этого представления называем обобщенной функцией, интегрируемой на классе $C(q, r; n)$. Обобщенная функция в принятом здесь смысле должна быть интегрируема на одном из классов $C(q, r; n)$ при соответствующих показателях q, r.

Мы говорим о сходимости в несобственном смысле для обобщенных функций

$$K_N(x_1,\ldots,x_n)\xrightarrow[N\to\infty]{}K(x_1,\ldots,x_n),$$

если можно указать такие q, r, что для любой функции $h(x_1,\ldots,x_n$ из класса $C(q, r; n)$ имеем

$$\int K_N(x_1,\ldots,x_n)\,h(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\to$$
$$\to\int K(x_1,\ldots,x_n)\,h(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.)$$

Подробней смотри дополнение А.

Мы получим тогда

$$f(E)=\frac{1}{i\pi}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(E')}{E'-E}dE' \qquad (-\infty < E < +\infty). \quad (1.5)$$

Если выделить из этой формулы вещественную часть, то мы придем к типичному «дисперсионному соотношению»

$$\operatorname{Re} f(E)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im} f(E')}{E'-E}dE'. \qquad (1.6)$$

Однако использовать дисперсионное соотношение непосредственно в виде (1.6) в большинстве случаев не удается, так как во многих приложениях условия (1.2) оказываются слишком жесткими: реальные физические функции, фигурирующие в дисперсионных соотношениях, могут не только не убывать на бесконечности, но даже и возрастать, однако не быстрее некоторого полинома.

1.5. Покажем, что не составляет труда распространить проведенные рассуждения и на случай функций $f(E)$, аналитических в верхней полуплоскости, для которых вместо (1.2) выполняются менее жесткие условия:

а$'$) *имеется такое целое* $m > 0$, *что для любого* $\delta > 0$ *можно указать постоянные* $A_j(\delta)$ *такие, что*

$$|f(E)| \leqslant A_0(\delta)|E|^m + \ldots + A_m(\delta) \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} E > \delta; \qquad (1.2')$$

б$'$) *при* $\operatorname{Im} E \longrightarrow 0$ *функция* $f(E)$ *стремится в несобственном смысле к функции, интегрируемой в некотором классе* $C(q, r)$.

Мы будем говорить, что такие аналитические функции обладают на бесконечности полюсом n-го порядка, где n — наибольшее из чисел $m+1$ и $r-2$, или что они не имеют на бесконечности существенной особенности.

Чтобы свести этот случай к предыдущему, рассмотрим наряду с $f(E)$ функцию

$$g(E)=\frac{f(E)}{(E-E_0+i\varepsilon)^{n+1}}. \qquad (1.7)$$

Ясно, что если $f(E)$ аналитична в верхней полуплоскости и обладает на бесконечности полюсом не выше n-го порядка, то функция $g(E)$ будет удовлетворять условиям (1.2) в верхней полуплоскости при любом вещественном E_0 и положительном ε. Следовательно, для $g(E)$ можно будет воспользоваться соотношением (1.5) и написать

$$f(E) = \frac{(E - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(E')\,dE'}{(E' - E)\,(E' - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}} \tag{1.8}$$
$$(-\infty < E,\ E_0 < +\infty).$$

С помощью аналогичного (1.4) символического тождества

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{(E - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = P\left\{\frac{1}{(E' - E_0)^{n+1}}\right\} - \frac{i\pi(-1)^n}{n!}\,\delta^{(n)}(E' - E_0) \tag{1.9}$$

мы сможем опять разделить в интеграле (1.8) δ-образные части и главные значения и выделить затем вещественную часть.

Таким образом, и в рассматриваемом случае функций, обладающих на бесконечности полюсом не выше n-го порядка, опять можно записать соотношения типа (1.5):

$$f(E) = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(E')\,dE'}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} +$$
$$+ f(E_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(E_0)}{n!}(E - E_0)^n \tag{1.10}$$
$$(-\infty < E,\ E_0 < +\infty),$$

которые, однако, будут теперь, во-первых, выполняться лишь с точностью до полинома степени n и, во-вторых, обладать более сложным ядром, обеспечивающим сходимость интеграла (простой интеграл, типа (1.5), был бы для растущей на бесконечности функции расходящимся). Соотношению (1.10) можно придать и несколько более удобную форму.

Выберем для этого какие-либо вещественные c_j, E_j, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{(j)} c_j E_j^q = 0 \quad \text{для} \quad q = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

и определим *операцию* Σ в применении к любой функции $f(E)$, как

$$\sum f(E) = \sum_{(j)} c_j f(E_j). \tag{1.12}$$

Ясно, что в силу (1.11) Σ дает нуль в применении к любому полиному от E степени не выше n. Заметим теперь, что разность

$$\left\{ \frac{(E-E_0)^{n+1}}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} - \frac{1}{E'-E} \right\} \tag{1.13}$$

является по отношению к E полиномом n-й степени (при объединении обоих членов знаменатель $E'-E$ сократится). Поэтому в применении к выражениям типа (1.13) Σ дает нуль. Применяя теперь операцию Σ к обеим частям (1.10), получаем немедленно

$$\sum_{(j)} c_j \operatorname{Re} f(E_j) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} f(E') \sum_{(j)} \frac{c_j}{E'-E_j} dE', \tag{1.14}$$

поскольку все полиномы при этом уничтожаются.

Таким образом, можно сказать, что «простое» соотношение (1.5) сохраняется и по отношению к функциям $f(E)$, полиномиально возрастающим на бесконечности — стоит только применить к нему исключающую полиномы операцию Σ с соответствующим n[1]).

1.6. Чтобы воспользоваться математическими дисперсионными соотношениями для изучения какого-либо процесса соударения частиц, необходимо предварительно убедиться, что соответствующая амплитуда рассеяния как функция энергии может быть надлежащим образом продолжена на верхнюю полуплоскость. Чтобы сразу же пояснить связь, существующую между свойством аналитической продолжимости амплитуды рассеяния в верхнюю полуплоскость и условием причинности, рассмотрим чисто иллюстративный одномерный пример.

---

[1]) Могло бы показаться, что для полиномиально возрастающих функций $f(E')$ правая часть (1.14) не имеет смысла из-за расходимости интегралов (как это было замечено в отношении (1.5)), однако это не так, поскольку из анализа вывода этого соотношения видно, что хотя интеграл от каждого отдельного члена в сумме по j и будет расходиться, но интеграл от входящей в (1.14) линейной комбинации с c_j и E_j, удовлетворяющей (1.11), должен быть сходящимся.

Представим себе, что амплитуда рассеяния $f(E)$ определена как

$$f(E)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,e^{iEt}\,dt, \tag{1.15}$$

причем в силу условия причинности (в том, что условие причинности приводит именно к соотношениям такого типа, мы убедимся в §§ 2 и 3):

$$F(t)=0 \quad \text{для} \quad t<0.$$

Переходя в верхнюю полуплоскость

$$E=x+iy \qquad (y>0),$$

замечаем, что множитель e^{-yt} играет роль режущего фактора, обеспечивающего сходимость интеграла (1.15), поскольку при $t<0$, где e^{-yt} возрастает, функция $F(t)$ равна нулю.

Можно показать, что даже если $F(t)$ будет сингулярной функцией, лишь бы она оставалась интегрируемой в смысле нашего определения (1.12), все равно интеграл (1.15) будет сходиться и определять функцию без существенных особенностей на бесконечности.

Иное положение мы встретим, если $F(t)$ обращается в нуль лишь для $t<-a$, где a — некоторая «элементарная длина». Тогда, заменяя в (1.15)

$$t\to t-a,$$

увидим, что

$$f(E)=e^{-iaE}f_1(E). \tag{1.16}$$

Теперь только фактор $f_1(E)$ не обладает существенной особенностью на бесконечности. Экспонента же e^{-iaE}, а значит, и $f(E)$ такой особенностью обладают. Поэтому в данном случае, чтобы получить функцию, для которой выполняются дисперсионные соотношения, необходимо будет умножить $f(E)$ на $e^{i\alpha E}$ с $\alpha\geqslant a$.

Разумеется, на самом деле ситуация будет значительно более сложной, хотя бы потому, что интегрирование в формулах, заменяющих (1.15), будет выполняться по большему числу переменных. Однако, как мы увидим дальше, несмотря на необходимость существенного технического усовершенствования приведенного сейчас рассуждения, основа его сохранится неизменной.

1.7. Вернемся теперь к вопросу о физических дисперсионных соотношениях.

Как уже упоминалось, аналитическому поведению амплитуды рассеяния было посвящено много работ. Прежде всего надо будет упомянуть фундаментальные работы Гайзенберга

[3], наметившие программу непосредственного изучения матрицы рассеяния, преобразующей асимптотику падающей волны в асимптотику расходящейся, и примыкающие к ним исследования Ху Нина [4], ван-Кампена [5], М. Г. Крейна [6]. В последних рассматривался процесс упругого соударения двух частиц с точки зрения обычной квантовой механики, сводимый к задаче рассеяния одной частицы на неподвижном силовом центре. В качестве $f(E)$ здесь изучалась компонента амплитуды рассеяния, соответствующая парциальной волне с определенным моментом количества движения, главным образом амплитуда s-волны.

Важным результатом, полученным в этом направлении, являются теоремы о возможности аналитического продолжения амплитуды s-рассеяния $f_s(E)$ на верхнюю полуплоскость для того случая, когда взаимодействие практически исчезает на расстояниях, больших радиуса a некоторой «сферы действия». При этом оказывается, однако, что, как то очевидно из приведенного выше иллюстративного примера, на бесконечности $f_s(E)$ может иметь существенную особенность, которая устраняется лишь умножением на «режущий фактор» e^{iaE}. Поэтому регулярной в верхней полуплоскости будет только функция $f_s e^{iaE}$, для которой будет применимо дисперсионное соотношение (1.6).

Такого типа дисперсионное соотношение было применено Гёбелем, Карплюсом и Рудерманом [7] к упругому рассеянию π-мезонов на нуклонах. Использовав имеющиеся экспериментальные данные по s-рассеянию, эти авторы пришли к тому интересному результату, что радиус мезон-нуклонного взаимодействия должен быть больше 0,1 комптоновской длины мезона.

Следует, однако, подчеркнуть, что работы данного направления исходят из схемы обычной квантовой механики, не учитывающей особенностей теории поля, в частности, возможности процессов рождения и уничтожения частиц.

Дисперсионные соотношения для рассеяния бозонов в квантовой теории поля были предметом исследования другого направления, представленного работами Гелл-Мана, Гольдбергера, Тирринга, Карплюса, Рудермана, Миязавы, Оэме и др. ([8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]). Здесь в качестве $f(E)$ рассматривается амплитуда рассеяния вперед в лабораторной системе отсчета, и изучается вопрос об ее аналитическом продолжении в верхнюю полуплоскость, причем считается, что ее особенность на бесконечности будет не сильнее полюса первого порядка. Такой вывод можно сделать как из экспериментальных данных о поведении сечения при больших энергиях, так и из расчетов по теории возмущений.

Рассмотрение амплитуды рассеяния вперед особенно удобно в силу того обстоятельства, что по так называемой «оптической теореме» ее мнимая часть пропорциональна полному эффективному сечению, т. е. величине, которую опять можно определить экспериментально. Оптическая теорема представляет собой следствие унитарности матрицы рассеяния и легко может быть доказана в самой общей форме.

Действительно, условимся обозначать индексами α, β совокупность всех квантовых чисел полной системы состояний. Тогда условие уинтарности матрицы рассеяния запишется как

$$\sum_{\beta} S_{\alpha\beta} S^{*}_{\alpha\beta} = 1.$$

Положим

$$S_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + iT_{\alpha\beta};$$

тогда $T_{\alpha\beta}$ будет пропорциональна амплитуде рассеяния для процесса $\alpha \to \beta$. Подставляя $T_{\alpha\beta}$ в условие унитарности, найдем

$$i\left(T^{*}_{\alpha\alpha} - T_{\alpha\alpha}\right) = \sum_{\beta} |T_{\alpha\beta}|^2.$$

В этом соотношении слева стоит, очевидно, мнимая часть амплитуды упругого рассеяния на нулевой угол, а правая часть как раз пропорциональна полному сечению для всех возможных процессов.

В нормировке, принятой в теории столкиовений частиц, полное сечение $\sigma(E)$ связано с $\operatorname{Im} f(E)$ равенством

$$\operatorname{Im} f(E) = \frac{k\sigma(E)}{4\pi}, \tag{1.17}$$

где k — волновое число, соответствующее энергии E. Физический смысл вещественной части $f(E)$ определится тогда из соотношения

$$[\operatorname{Re} f(E)]^2 + \left[\frac{k\sigma(E)}{4\pi}\right]^2 = |f(E)|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta=0}. \tag{1.18}$$

Первый вывод дисперсионных соотношений в формализме квантовой теории поля был предложен Гелл-Маном, Гольдбергером и Тиррингом [8], которые воспользовались теоремой Коши, установив предварительно должные аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед. Однако их доказательство аналитичности, во всяком случае для частиц с массой покоя отличной от нуля, не свободно от возражений, серьезность которых была признана самими авторами. Карплюс и Рудерман [10] установили дисперсионное соотношение, пригодное для процессов рассеяния нейтральных мезонов на нуклонах, однако их вывод основывался на аналитичности амплитуды рассеяния, как предварительном предположении.

Наконец, недавно Гольдбергер [11] попробовал вообще обойти вопрос об аналитическом продолжении амплитуды рассеяния в комплексную плоскость, рассматривая дисперсионные соотношения просто как некоторые тождества, чисто алгебраически следующие из определения дисперсивной и абсорбтивной частей (соответствующих нашему разбиению (1.4) на главное значение и δ-функцию) амплитуды рассеяния через суммы по полной системе промежуточных состояний. Однако легко заметить, что используемые им определения некорректны для $E < m$, так как при этом соответствующие интегралы расходятся (см. § 6).

1.8. Сделаем еще несколько замечаний относительно физического смысла величин, входящих в дисперсионные соотношения вида (1.6) или (1.14). В их левых частях стоит амплитуда упругого рассеяния вперед, а под интегралом справа — полное сечение. Обе эти величины наблюдаемы только для реальных состояний рассеяния, т. е. для энергий мезона *положительных* и *больших* m. В то же время интегрирование в правых частях распространяется на *все* значения энергии от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому, чтобы можно было практически использовать дисперсионные соотношения, в них надо избавиться от интегрирования по отрицательным энергиям и «ненаблюдаемой» области $0 < E < m$.

Исключения интегрирования по отрицательным энергиям можно добиться за счет использования требования инвариантности относительно зарядового сопряжения (или, для незаряженных полей, вещественности), которое приводит к соотношению между амплитудой рассеяния от отрицательной энергии и сопряженной амплитудой для положительной энергии. Исключение отрицательных энергий с помощью такого приема возможно всегда. Правда, оно приводит к «впутыванию» в дисперсионные соотношения сечений для античастиц (противоположного заряда), что, например, в случае рассеяния нуклонов, неудобно, поскольку сечения для антинуклонов пока экспериментально неизвестны.

Сложнее обстоит дело с «ненаблюдаемой» областью $E < m$, где, как мы выясним ниже, под интегралом возникают δ-функции $\delta(E - E_p)$ с E_p, соответствующим возможным промежуточным связанным состояниям. Если возможные связанные состояния обладают дискретным спектром, то такие интегралы легко вычисляются в явном виде. Если же спектр промежуточных состояний хотя бы в какой-то части оказывается непрерывным, то положение вещей коренным образом меняется.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ДОПУЩЕНИЯ

2.1. Как мы уже упоминали, в большинстве последних работ дисперсионные соотношения выводятся, исходя из обычной схемы квантовой теории поля. Однако мысль о том, что в действительности дисперсионные соотношения не связаны с обычным формализмом и должны получаться, исходя лишь из некоторых основных положений теории, представляется почти тривиальной. Ввиду важности вопроса о применимости дисперсионных соотношений и возможности их обобщений, мы хотим явно сформулировать те физические положения, которые необходимы для их вывода. Это представляется нам особенно важным, поскольку подробное изучение вводимых ниже радиационных операторов и установление соотношений между ними могло бы составить основу нового подхода к построению всей квантовой теории поля.

Современная схема квантовой теории поля базируется в сущности на трех основных допущениях: *гамильтоновом формализме, применении теории возмущений* и концепции *адиабатического включения и выключения взаимодействия*. *Гамильтонов формализм* приводит автоматически к выполнению *строгого требования причинности* (поскольку могущие нарушить это требование нелокальные варианты теории противоречат условию разрешимости уравнений), однако в последнее время возникли сомнения в том, что внутренне непротиворечивую теорию вообще можно поместить в узкие рамки гамильтонова метода [17], [21]. *Теория возмущений* предоставляет нам возможность *практического провед ния вычислений*, но соответствующие ряды, по-видимому, *сходятся лишь асимптотически* даже для слабой связи, не говоря уже о ядерном взаимодействии, когда эта теория вообще неприменима. Достоинством *концепции адиабатичности* является кажущаяся простота соотношений между действительными и свободными полями. Поскольку, однако, при этом в удаленном прошлом и будущем вместе со взаимодействием *между* частицами выключается и физически *всегда* существующее *самодействие*, эта концепция принципиально приводит к необходимости различать *фиктивные* и *реальные* свободные частицы, следовательно, в конечном счете, ко всей перенормировочной идеологии.

Предложенная Гайзенбергом [3] общая схема построения матрицы рассеяния полностью отбросила гамильтонов формализм; по существу не нуждалась в концепции адиабатичности и ничего не говорила о теории возмущений. Ввиду своей крайней общности предложенная постановка задачи не принесла, конечно, почти никаких конкретных результатов, и ее следует рассматривать скорее как программу для построения теории, чем как законченную схему. Подчеркнем, что, формулируя основные условия, которым должна подчиняться теория, Гайзенберг вовсе не рассмотрел *требования причинности*, которому (хотя бы в виде условия макроскопической причинности) теория обязательно должна удовлетворять.

Разработанная недавно одним из авторов (Н. Н. Б.) и Ширковым [16] теория матрицы рассеяния строилась, исходя из гайзенберговых положений, которые были, однако, сильно сýжены допущением разложения по постоянной связи, принятием концепции адиабатичности и, главное, тем, что к ним было присоединено требование причинности, сформулированное в виде строгого условия микроскопической причинности или локальности. Выяснилось, что эти допущения, чрезвычайно сильно ограничивая теорию, приводят к схеме, по существу эквивалентной обычному гамильтонову методу и отличающейся от него лишь возможностью провести изложение с большей математической ясностью.

2.2. В последнее время проявляется стремление продолжить разработку первоначальной гайзенберговой программы. Прежде всего здесь предпринимаются попытки уточнения основных определений, особенно существенные в свете необходимости ввести в теорию связанные состояния. Сюда относится важная работа Хаага [17], в которой уточняется ряд вопросов, связанных с математической формулировкой требований релятивистской инвариантности и процедуры вторичного квантования.

С точки зрения обычной теории поля способ введения связанных состояний в гайзенбергову схему не является очевидным: если не прибегать опять к адиабатическому выключению взаимодействия, то образующие связанное состояние частицы находятся все время вблизи друг друга, в то время как в гайзенберговой постановке задачи в начальном состоянии все частицы должны быть пространственно разнесены. Выход будет найден, если считать каждое конкретное связанное состояние части ей нового сорта и вместо образования связанного состояния говорить об уничтожении первоначальных элементарных частиц и рождении новой «сложной частицы». Естественно, что при таком подходе возникает весьма сложная задача о том, как описывать взаимодействие между этим большим числом внозь введенных в теорию сложных частиц. Мы не собираемся останавливаться на этой проблеме, так как не встретимся здесь с необходимостью вводить сложные частицы.

Далее встает вопрос об описании начальных состояний пространственно-разделенных частиц. Напомним, что в обычном изложении, когда возможностью образования связанных состояний пренебрегают, можно разбить полный гамильтониан H на «кинетическую энергию» H_0 и взаимодействие V, причем начальные состояния, сколько бы свободных частиц в них ни было, являются собственными функциями H_0. Однако при таком разбиении из H_0 выбрасывается как самодействие (благодаря чему частицы в начальном состоянии оказываются не реальными, а фиктивными свободными частицами), так и та составляющая взаимодействия, которой обязаны существованием сложные частицы (у H_0 таких частиц не будет). Мы хотим теперь так выделить H_0, собственными функциями которого будут начальные состояния, чтобы избегнуть обеих этих неприятностей. Этого можно будет добиться с помощью следующего построения [18] [1]).

2.3. Рассмотрим систему, описываемую полным гамильтонианом H. (Мы производим построение, руководствуясь принципом соответствия с обычной теорией.) Обозначим через R_0 пространство, состоящее из единственного вектора, описывающего состояние вакуума.

---

[1]) Дальнейшее построение, весьма существенное для идейного обоснования наших основных положений (свойства 1.6 и всего, касающегося составных частиц), читатель, интересующийся лишь непосредственно дисперсионными соотношениями, может и пропу-

Обозначим через R_1 пространство всех одночастичных собственных состояний, т. е. таких состояний, в которых имеется только одна *реальная* элементарная частица. Если рассматриваемый гамильтониан допускает существование связанных состояний, то у него будут еще и собственные состояния, в которых имеется один связанный комплекс из 2, 3,... реальных элементарных частиц. Натягивающиеся на такие состояния пространства обозначим через R_2, R_3, ... соответственно. Заметим, что все базисные состояния, на которые натянуты пространства R_0, R_1, R_2, ..., можно охарактеризовать как одночастичные. Мы имеем при этом в виду две особенности таких состояний: во-первых, они, с точки зрения их наблюдения, обладают некоторой степенью локализации (ср. остроумное определение с помощью ряда мысленных экспериментов у Хаага [17]), во-вторых, они являются стабильными.

Пространство, векторы которого можно будет рассматривать как функции, описывающие нужные нам начальные (или конечные) состояния, отвечающие любому числу реальных, но между собой не взаимодействующих из-за пространственной сепарации частиц, получится при этом очевидным образом, как прямое произведение всех пространств R_0, R_1, R_2, ..., причем каждый из множителей может входить в это произведение произвольное число раз, в соответствии с тем, что в начальном состоянии может быть произвольное число частиц каждого сорта:

$$R = R_0 \times R_0 \times \ldots \times R_1 \times R_1 \times \ldots \times R_2 \times R_2 \times \ldots \times R_k \times \ldots \qquad (2.1)$$

«Свободный» гамильтониан, собственными функциями которого являются функции, описывающие начальное состояние реальных не взаимодействующих друг с другом частиц, можно теперь построить так:

Введем операторы проектирования P_0, P_1, ..., P_k, ... гамильтониана H на пространства R_0, R_1, ..., R_k, ..., и определим «свободный» гамильтониан H_0 как прямую сумму

$$H_0 = P_0 H P_0 \dotplus P_1 H P_1 \dotplus P_1 H P_1 \dotplus \ldots \dotplus P_2 H P_2 \dotplus P_2 H P_2 \dotplus \ldots \qquad (2.2)$$

Полный гамильтониан H можно будет записать тогда, как

$$H = H_0 + V = H_0 + (H - H_0). \qquad (2.3)$$

Гамильтониан взаимодействия V описывает теперь именно только *взаимные* действия частиц, но *не самодействие*, которое благодаря избранному методу построения полностью содержится в гамильтониане H_0. Точнее, V описывает даже только ту часть взаимодействия, которая ответственна за процессы рассеяния и рождения

стить. Знакомым с обычной перенормировочной техникой Швингера — Дайсона мы можем сказать, что проводимые ниже мелким шрифтом рассуждения (в части, не касающейся связанных состояний) сводятся к использованию *только перенормированной S-матрицы*, для которой

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1 \quad \text{и} \quad \langle 1 | S | 1 \rangle = 1.$$

частиц, поскольку взаимодействие, сдерживающее элементарные частицы в составе комплексов («сложных частиц»), также уже включено нами в H_0. Поэтому при рассмотрении предельных переходов к начальному или конечному состоянию, $t \to \mp\infty$, мы можем распорядиться взаимодействием V без всякой осторожности, например просто использовать адиабатическое выключение; ни к исчезновению самодействия, ни к распаду связанных состояний это теперь не приведет.

2.4. Использовавшиеся в предыдущем построении ссылки на гамильтониан носили, разумеется, чисто иллюстративный характер и преследовали лишь цели возможной простоты изложения и его связи с общепринятым. Это построение надо рассматривать лишь как пример того, как, исходя из обычной теории, можно достигнуть выполнения основных физических допущений, к формулировке которых мы сейчас переходим.

Подчеркиваем, что хотя, с одной стороны, все эти допущения выполняются в обычной теории, но мы не считаем, что они полностью исчерпывают ее содержание. Мы оставляем этот весьма интересный вопрос открытым. Равным образом мы не собираемся здесь решать и более общий вопрос о том, образуют ли наши допущения в какой-либо степени непротиворечивую полную и независимую систему аксиом — эти допущения надлежит рассматривать не как попытку создать такую систему в смысле, который вкладывается в это понятие математиками, а лишь как собрание предположений, которые потребовались нам для построения вывода дисперсионных соотношений.

2.4.1. Все наши допущения уместно разделить на две группы: *общие свойства*, обязательные, с нашей точки зрения, для весьма обширного класса возможных теорий, и *специальные свойства локальности*, связанные с налагаемым нами требованием выполнения микроскопической причинности. Наложение последней группы требований необходимо, чтобы получить дисперсионные соотношения обычного вида.

I. Общие свойства

(1) В соответствии со сказанным выше мы принимаем гайзенбергову постановку задачи. Будем считать, что асимптотические состояния системы представляют собой совокупности некоторого числа бесконечно удаленных друг от друга

элементарных и составных частиц. Взаимодействие *между* этими частицами равно нулю, и потому такие величины, как энергия, импульс и т. д., являются *аддитивными*. Такие состояния описываются амплитудами $|\ \ \rangle$, являющимися элементами линейного пространства, которое можно представлять себе построенным с помощью приема, описанного выше.

(2) Будем считать, что у нас имеется некоторая группа G преобразований L, которая включает в качестве подгруппы группу Лоренца $\mathfrak{L}$ (G может включать и другие преобразования, например изотопические, градиентные преобразования и т. п.). Под действием L из G амплитуды состояний преобразуются с помощью некоторого ее унитарного представления с элементами U_L [1]).

(3) Если в состоянии $|p\rangle$ вектор энергии-импульса p имеет определенное значение, то

$$U_{L_a}|p\rangle = e^{-ipa}|p\rangle, \tag{2.4}$$

если L_a — трансляция $x \to x + a$. Существует состояние $|0\rangle$, для которого

$$U_{L_a}|0\rangle = |0\rangle \tag{2.5}$$

— состояние вакуума.

Аналогичные свойства могут быть сформулированы и для других подгрупп G, в частности для представлений, соответствующих моменту.

(4) Существует система собственных амплитуд состояния 4-импульса, отвечающих неотрицательным значениям энергии, которая является полной, так что

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \\ + \sum_n \int d\mathbf{k}\,\langle\alpha|A|n\mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|B|\beta\rangle. \tag{2.6}$$

---

[1]) В аналогии с рассуждениями Хаага [17] заметим, что для одночастичных состояний U_L образуют *неприводимые* представления группы G. Далее, из выполненного выше построения можно было бы установить, что для всякого асимптотического состояния, поскольку оно всегда изображается вектором в пространстве, образованном прямым произведением пространств одночастичных состояний, инфинитезимальный оператор U_L будет прямой суммой инфинитезимальных операторов U'_L, соответствующих неприводимым представлениям. Отсюда, в частности, следовало бы тогда и сделанное выше утверждение об аддитивности интегралов движения.

Здесь n означает совокупность всех остальных дискретных и непрерывных квантовых чисел, которые в совокупности с $\mathbf{k}$ полностью характеризуют состояние.

(5) Предметом теории является изучение вероятностей переходов между такими асимптотическими состояниями. Будем считать, что каждому переходу между состояниями $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ отвечает определенная вероятность, обычным образом выражающаяся через матричные элементы некоторого унитарного оператора S,

$$S S^{+} = 1. \tag{2.7}$$

(6) Поскольку мы считаем одночастичные состояния состояниями *реальных* частиц, то одночастичные состояния и вакуум будут у нас *стабильными*, т. е. будет

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle, \tag{2.8}$$

если $|\alpha\rangle$ — амплитуда состояния вакуума, одной (стабильной), — элементарной или составной, — частицы.

2.4.2. Прежде чем переходить к изложению *специальных локальных свойств*, сделаем некоторые замечания.

Очевидно, что наши асимптотические состояния, отвечающие наличию определенного числа n частиц определенных сортов α_i с определенными импульсами $\mathbf{p}_i$, можно получить, если ввести обычным образом *операторы рождения* $a^{(+)}_{\alpha_i}(\mathbf{p}_i)$ и *уничтожения* $a^{(-)}_{\alpha_i}(\mathbf{p}_i)$ частицы α_i-го сорта с импульсом $\mathbf{p}_i$ и подействовать ими на амплитуду состояния вакуума:

$$|\alpha_1 \mathbf{p}_1; \ldots; \alpha_n \mathbf{p}_n\rangle = a^{(+)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1) \ldots a^{(+)}_{\alpha_n}(\mathbf{p}_n)|0\rangle, \tag{2.9}$$

причем из того обстоятельства, что наши пространственно-разделенные частицы не взаимодействуют, будет следовать, что операторы $a^{(+)}$, $a^{(-)}$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$\left[a^{(-)}_{\alpha}(\mathbf{p}),\ a^{(+)}_{\alpha'}(\mathbf{p}')\right] = \delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}); \tag{2.10}$$

$$\left[a^{(-)}_{\alpha}(\mathbf{p}),\ a^{(-)}_{\alpha'}(\mathbf{p}')\right] = 0. \tag{2.11}$$

Из свойства I. (2) будет тогда следовать, что при преобразовании L из G операторы $a^{(\pm)}_{\alpha}(\mathbf{p})$ переходят в

$$a^{(\pm)}_{\alpha}(\mathbf{p}) \to a^{(\pm)}_{L(\alpha)}(L\mathbf{p}) = U_L\, a^{(\pm)}_{\alpha}(\mathbf{p})\, U_L^{+}. \tag{2.12}$$

Чтобы можно было сформулировать условие причинности (и вообще проводить какие-либо рассуждения о локальных свойствах теории), нам, очевидно, необходимо как то научиться *различать отдельные точки пространства-времени*. Для этой цели мы построим из операторов рождения и уничтожения *элементарных* частиц обычные пространственно-локализованные комбинации:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \left\{ e^{ikx} a^{(+)}(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a^{(-)}(\mathbf{k}) \right\}, \tag{2.13}$$

$$kx = k^0 x^0 - \mathbf{kx}, \qquad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

где мы, чтобы не загромождать изложения, выписали формулу, относящуюся к вещественному скалярному полю [1]).

Дальнейшее изложение в обычной теории можно было бы вести примерно следующим образом. Матрицу рассеяния S всегда можно мыслить в виде функционального разложения по операторам рождения и уничтожения (ср. [26]):

$$S = \sum_{l,m=0}^{\infty} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_l \, d\mathbf{k}'_1 \ldots d\mathbf{k}'_m f^{lm}(\mathbf{k}; \mathbf{k}') \times$$

$$\times a^{(-)}(\mathbf{k}_1) \ldots a^{(-)}(\mathbf{k}_l) a^{(+)}(\mathbf{k}'_1) \ldots a^{(+)}(\mathbf{k}'_m) \tag{2.14}$$

(для простоты мы считаем временно, что работаем с бозе-частицами одного сорта). Такое разложение можно было бы переписать с помощью (2.13) в разложение по нормальным произведениям полей $\varphi(x)$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n f^n(x_1, \ldots, x_n) \colon \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \colon \tag{2.15}$$

и *определить* после этого образование вариационной производной S-матрицы по полю $\varphi(x)$, $\dfrac{\delta S}{\delta\varphi(x)}$, с помощью сле-

---

1) Именно в этом пункте мы впервые сталкиваемся с различием между элементарными и составными частицами. Для последних хотя и можно было бы ввести формально определение типа (2.13), но физический смысл таких комбинаций был бы в достаточной степени темным.

дующей операции: берется сумма всех выражений, получающихся из каждого члена (2.14) последовательным вычеркиванием одного из $\varphi(x_i)$ с заменой на $\delta(x-x_i)$.

После этого *матричные элементы матрицы рассеяния*

$$S_{\omega\omega'}=\langle \mathbf{p}_1\alpha_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_r\alpha_r\,|\,S\,|\,\mathbf{p}'_1\alpha'_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}'_s\alpha'_s\rangle \tag{2.16}$$

можно было бы свести к *вакуумным средним «радиационных операторов»*[1])

$$H(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\frac{\delta^n S}{\delta\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\delta\varphi_{\alpha_n}(x_n)}S^+. \tag{2.17}$$

В самом деле, в силу (2.9) матричный элемент (2.15) можно переписать в виде

$$\left\langle 0\,\middle|\,a^{(-)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\ldots a^{(-)}_{\alpha_r}(\mathbf{p}_r)\,S a^{(+)}_{\alpha'_1}(\mathbf{p}'_1)\ldots a^{(+)}_{\alpha'_s}(\mathbf{p}'_s)\,\middle|\,0\right\rangle. \tag{2.18}$$

Ограничиваясь для простоты опять случаем скалярных вещественных полей, заметим, что из (2.10), (2.11), (2.13) получается

$$\left.\begin{aligned}
\left[\varphi_{\rho'}(x),\ a^{(+)}_{\rho}(\mathbf{p})\right]&=\frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\
\left[a^{(-)}_{\rho}(\mathbf{p}),\ \varphi_{\rho'}(x)\right]&=\frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\
\text{где}\qquad p^0&=+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2},
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

откуда для перестановочных соотношений операторов рождения и уничтожения с матрицей рассеяния следует:

$$\left.\begin{aligned}
\left[S,\ a^{(+)}_{\rho}(\mathbf{p})\right]&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dx\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho}(x)}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\
\left[a^{(-)}_{\rho}(\mathbf{p}),\ S\right]&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dx\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho}(x)}\frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\
\text{где опять}\qquad p^0&=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

---

[1]) Вообще мы будем называть *радиационным оператором* всякое выражение, которое можно получить из S и S^+ применением конечного числа операций вариационного дифференцирования по операторам поля и умножения, если только S и S^+ входят в такое выражение одинаковое число раз. Полное число фигурирующих вариационных дифференцирований будем называть *порядком* радиационного оператора.

Перетаскивая теперь в (2.18) все операторы рождения налево, а операторы уничтожения направо, где, подействовав на вакуумную функцию, они дадут нуль, получим (мы предполагаем, что все импульсы $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_r$ и $\mathbf{p}'_1, \ldots, \mathbf{p}'_s$ различны, в противном случае возникли бы еще члены того же вида, но меньшей степени), что (2.16) можно записать в виде интеграла

$$\left.\begin{aligned} S_{\omega\omega'} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3(r+s)}{2}}} \int dx_1 \ldots dx_r \ldots dx'_s \frac{e^{i\left(\sum p_i x_i - \sum p'_i x'_i\right)}}{2^{\frac{r+s}{2}} \sqrt{p_1^0 \ldots p_r^0 p_1'^0 \ldots p_s'^0}} \times \\ &\times \left\langle 0 \left| \frac{\delta^{(r+s)} S}{\delta\varphi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \ldots \delta\varphi_{\mathbf{p}_r}(x_r)\, \delta\varphi_{\mathbf{p}'_1}(x'_1) \ldots \delta\varphi_{\mathbf{p}'_s}(x'_s)} \right| 0 \right\rangle, \\ \text{где} \qquad & p_i^0 = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Под интегралом в (2.21) стоят как раз вакуумные средние от только что определенных радиационных операторов (2.17). Действительно, в силу условия стабильности вакуума I.6 мы имеем

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta^{(r+s)} S}{\delta\varphi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \ldots \delta\varphi_{\mathbf{p}'_s}(x'_s)} \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{\delta^{(r+s)} S}{\delta\varphi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \ldots \delta\varphi_{\mathbf{p}'_s}(x'_s)} S^+ \right| 0 \right\rangle. \tag{2.22}$$

Заметим, однако, что в этом выводе мы по существу рассматривали $\varphi(x)$ как произвольную функцию. Но (2.13) *нельзя*, вообще говоря, разрешить относительно $a^{(\pm)}$, поскольку это выражение определяет не произвольную $\varphi(x)$, а только $\varphi(x)$, обязательно удовлетворяющую уравнению

$$(\Box - m^2)\, \varphi(x) = 0. \tag{2.23}$$

Поэтому из (2.14) нельзя получить (2.15) — функционал, определенный для более широкого класса операторных функций $\varphi(x)$, не обязательно удовлетворяющих уравнению (2.23). Далее, мы, казалось бы, произвольным образом назначили правило вариационного дифференцирования по $\varphi(x)$. Наконец, перестановочные соотношения (2.19) получаются из (2.10,11), (2.13) опять-таки только для $\varphi(x)$, удовлетворяющих уравнению (2.23), мы же пользовались ими для произвольного $\varphi(x)$.

Смысл проведенного преобразования сводится к тому, что мы фактически расширили определение S-матрицы, снимая в (2.15) ограничение (2.23) и рассматривая матрицу рассеяния как функционал от произвольных, но коммутирующих (или, для фермиевских полей, антикоммутирующих) $\varphi(x)$[1]. При этом все, что нам потребуется для дальнейшего, — это перестановочные соотношения (2.19) этих функций с операторами рождения и уничтожения, позволяющие установить (2.20) и тем самым правило для сведения любых матричных элементов матрицы рассеяния к вакуумным средним от радиационных операторов. Поэтому мы не будем более ссылаться на аналогию с обычной теорией, но просто потребуем выполнения следующих:

II. Локальных свойств

(1) Элементарные частицы характеризуются бозонными и фермионными полями $\varphi(x)$ с обычными трансформационными свойствами свободных полей. Оператор S обладает вариационными производными любого порядка по этим полям[2]). Радиационные операторы (2.17) и их произведения с независимыми аргументами являются интегрируемыми, т. е.

---

[1]) Подчеркнем, что такое расширение никоим образом не выводит нас за рамки обычной теории. Действительно, и в обычном изложении «поля» $\varphi_\rho(x)$ играют двоякую роль: во-первых, сам оператор S мыслится функционалом от этих полей, а, во-вторых, соответствующие полям операторы рождения и уничтожения $a^{(\pm)}$ служат для вычисления матричных элементов этого оператора. При этом в первой из этих ролей поля всегда стоят под знаком хронологических или нормальных произведений и потому коммутируют (антикоммутируют) друг с другом. Кроме того, в этом случае при варьировании не налагается ограничений, связанных с тем, чтобы поля удовлетворяли каким-либо уравнениям. Фактически это эквивалентно допущению, что S-матрица рассматривается как функционал от произвольных классических функций $\varphi_\rho(x)$, в точности коммутирующих (антикоммутирующих), которые обладают лишь *трансформационными свойствами* квантовых полей. Наоборот, при вычислении матричных элементов существенно, что $a^{(\pm)}$ являются *операторами*, обладающими свойствами (2.19).

[2]) Вариационные производные имеют здесь все свои обычные свойства. Их трансформационный характер определяется трансформационным характером полей $\varphi(x)$. Производные матрицы S по бозонным полям коммутируют, а по фермионным — антикоммутируют между собой.

все матричные элементы

$$\langle \omega | H(x_1, \ldots, x_n) \ldots H(z_1, \ldots, z_m) | \omega' \rangle$$

суть обобщенные функции, интегрируемые в одном из классов $C(q, r)$ (см. (1.1), (1.2)).

(2) Выполняется условие причинности в форме

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^{+}\right) = 0 \quad \text{для } x \lesssim y\text{[1]}. \tag{2.24}$$

(3) Матричные элементы матрицы рассеяния можно преобразовать в вакуумные средние радиационных операторов, пользуясь формальными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \left[\varphi_{\rho'}(x), a_{\rho}^{(+)}(\mathbf{p})\right]_{-} &= \frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \\ \left[a_{\rho}^{(-)}(\mathbf{p}), \varphi_{\rho'}(x)\right]_{-} &= \frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \\ p^0 &= +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

и аналогичными соотношениями для фермионов[2])

$$\left.\begin{aligned} \left[b_{+S''}^{(-)}(\mathbf{p}''), \bar{\psi}_{\lambda'}(x')\right]_{+} &= \frac{\overline{u_{\lambda'}^{+S''}(\mathbf{p}'')}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip''x'}; \quad p''^0 = +\sqrt{\mathbf{p}''^2 + M^2}, \\ \left[b_{+S''}^{(-)}(\mathbf{p}''), \psi_{\lambda}(x)\right]_{+} &= \left[b_{+S}^{(+)}(\mathbf{p}), \bar{\psi}_{\lambda'}(x')\right]_{+} = 0, \\ \left[\psi_{\lambda}(x), b_{+S}^{(+)}(\mathbf{p})\right]_{+} &= \frac{u_{\lambda}^{+S}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx}; \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

---

[1]) Это условие причинности совершенно аналогично использовавшемуся в [16], куда мы и отсылаем читателя. Обозначение $x \lesssim y$ означает, что точка x лежит раньше точки y, либо отделена от нее пространственно-подобным интервалом.

[2]) Приведем для справок основные формулы для спинорного поля, которые выполняются в обычной теории свободного поля в употребляемой нами нормировке. Для оператора поля $\psi_\lambda(x)$ мы пишем разложение

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \left\{e^{ikx} u_\lambda^{-\alpha s}(\mathbf{k})\, b_{-\alpha s}^{(+)}(\mathbf{k}) + e^{-ikx} u_\lambda^{+\alpha s}(\mathbf{k})\, b_{+\alpha s}^{(-)}(\mathbf{k})\right\}, \tag{2.27}$$

$$k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2},$$

Заметим в заключение, что для вычисления любых матричных элементов S-матрицы нам нужно было бы иметь какие-то аналогичные правила и для преобразования в радиационные операторы матричных элементов по состояниям,

---

где $\pm$, α и s — квантовые числа, определяющие частицу, античастицу, спиновое и изотопическое состояние, $b^{(\pm)}_{\dots}$ — операторы рождения и уничтожения фермиона в соответствующем состоянии, $u^{\dots}_{\lambda}$ — соответствующие спинорные амплитуды. Тогда для дираковски сопряженного оператора $\bar{\psi}_{\lambda}(x)$ получим разложение

$$\bar{\psi}_{\lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \left\{ e^{ikx} \overline{u_{\lambda}^{+\alpha s}}(\mathbf{k})\, b^{(+)}_{+\alpha s}(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \overline{u_{\lambda}^{-\alpha s}}(\mathbf{k})\, b^{(-)}_{-\alpha s}(\mathbf{k}) \right\},$$
$$k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}. \tag{2.28}$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\left[b^{(-)}_{\pm \alpha s}(\mathbf{k}),\, b^{(+)}_{(\pm)'\alpha' s'}(\mathbf{k}') \right]_{+} = \delta_{(\pm)(\pm)'}\, \delta_{\alpha\alpha'}\, \delta_{ss'}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \tag{2.29}$$

остальные антикоммутаторы равны нулю. Имеют место соотношения эрмитова сопряжения:

$$\left(b^{(-)}_{+\alpha s}(\mathbf{k}) \right)^{*} = b^{(+)}_{+\alpha s}(\mathbf{k}); \qquad \left(b^{(+)}_{-\alpha s}(\mathbf{k}) \right)^{*} = b^{(-)}_{-\alpha s}(\mathbf{k}). \tag{2.30}$$

Из того, что ψ_{λ} удовлетворяет уравнению Дирака

$$\left(i\gamma^{i} \frac{\partial}{\partial x^{i}} - M \right) \psi(x) = \left(i\gamma \frac{\partial}{\partial x} - M \right) \psi(x) = 0 \tag{2.31}$$

следует, что амплитуды $u^{(\pm)\alpha s}$ удовлетворяют уравнениям в импульсном представлении

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma k - M)\, u^{+\alpha s}(\mathbf{k}) = 0; \qquad \overline{u^{+\alpha s}}(\mathbf{k})\,(\gamma k - M) = 0 \\ &\qquad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} \\ &\text{и} \\ &(\gamma k - M)\, u^{-\alpha s}(-\mathbf{k}) = 0; \qquad \overline{u^{-\alpha s}}(-\mathbf{k})\,(\gamma k - M) = 0 \\ &\qquad k^0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Кроме разложений (2.27), (2.28), нам будет удобно использовать и фурье-преобразования

$$\psi_{\lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \psi_{\lambda}(p)\, dp \tag{2.33}$$

и

$$\bar{\psi}_{\lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} \bar{\psi}_{\lambda}(p)\, dp, \tag{2.34}$$

включающим сложные частицы. Это — весьма актуальная и важная задача, но она могла бы составить предмет самостоятельного исследования и здесь мы не будем ее касаться. Для вывода наиболее интересных дисперсионных соотношений мы с решением этого вопроса не будем иметь дела.

в которых не предполагается, что $\psi_\lambda(x)$ и $\overline{\psi}_\lambda(x)$ удовлетворяют каким-либо уравнениям и соответственно все четыре компоненты импульса считаются независимыми. Для функций, удовлетворяющих (2.31), операторы $\psi_\lambda(p)$ и $\overline{\psi}_\lambda(p)$ связаны с операторами $b^{(\pm)}(\mathbf{p})$ соотношениями

$$\psi_\lambda(p) = 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta\left(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) u_\lambda^{+S}(\mathbf{p})\, b^{(-)}_{+S}(\mathbf{p}) + \\ + 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta\left(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) u_\lambda^{-S}(-\mathbf{p})\, b^{(+)}_{-S}(-\mathbf{p}) \quad (2.35)$$

и

$$\overline{\psi}_\lambda(p) = 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta\left(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) \overline{u_\lambda^{+S}}(\mathbf{p})\, b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p}) + \\ + 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta\left(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) \overline{u_\lambda^{-S}}(-\mathbf{p})\, b^{(-)}_{-S}(-\mathbf{p}). \quad (2.36)$$

$$S = \{\alpha, s\}$$

Из разложений (2.27) и (2.28) и перестановок (2.29) непосредственно получаются постулированные в тексте антикоммутаторы (2.26). Выпишем еще формулы для перестановок операторов уничтожения и рождения частиц с матрицей рассеяния

$$\left.\begin{aligned} \left[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''), S\right]_- &= \int dx\left[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''), \overline{\psi}_\lambda(x)\right]_+ \frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}_\lambda(x)}, \\ \left[S, b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})\right]_- &= \int dx\left[\psi_\lambda(x), b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})\right]_+ \frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)}. \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

Заметим, что в отличие от бозевских полей, когда формулы (2.20) были в равной степени применимы как к самой S-матрице, так и к любой ее вариационной производной, (2.37) применимы только к самой S-матрице; для взятия последующих вариаций по фермионному полю нужные формулы приходится, из-за антикоммутативности вариаций, выводить заново.

§ 3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАДИАЦИОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

3.1. В предыдущем параграфе мы ввели радиационные операторы различного порядка. Сейчас мы хотим исследовать свойства таких операторов первого и второго порядка несколько подробнее. Поскольку многие выкладки будут при этом совершенно тривиальны, хотя и займут немало места, то мы отнесем значительную часть в мелкий шрифт. Читатель может обращаться к такому материалу только в той степени, в какой соответствующие формулы понадобятся для дальнейшего.

Прежде всего конкретизируем изложение, ограничившись практически важным случаем взаимодействия фермионного (нуклонного) и бозонного (π-мезонного) полей. Мы рассмотрим только основное изотопически инвариантное взаимодействие и не будем принимать во внимание наличие электромагнитного и слабого взаимодействий.

Как обычно, нуклонное поле мы будем описывать спинором

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где ψ_P и ψ_N — четырехкомпонентные спинорные волновые функции протона и нейтрона соответственно.

Мезонное поле будем рассматривать как поле с тремя вещественными псевдоскалярными компонентами $\varphi_\rho(x)$, образующими вектор в изотопическом пространстве. При этом, как обычно, частицам π^+, π^- и π^0 будут сопоставляться линейные комбинации

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_- = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_0 = \varphi_3. \tag{3.2}$$

Выбор вещественного представления, хотя принципиальио и необязательный, несколько упростит дальнейшие рассуждения. Мы будем считать, что группа G включает в себя, кроме группы Лоренца, вращеиия в изотопическом пространстве и градиентиые преобразоваиия первого рода фермиоииых полей:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \qquad \alpha = \mathrm{const}. \tag{3.3}$$

Простейшими радиационными операторами будут операторы первого порядка. В силу выбора вещественных $\varphi_\rho(x)$, таких операторов будет три (вместо четырех в противном случае), именно:

$$j_\rho(x) = i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^+, \overline{\frown}(x) = i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^+, \frown(x) = -i\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(x)}S^+$$[1]).

$$\tag{3.4}$$

Мы будем называть эти три оператора *токами*[2]), первый — *бозевским*, два последние — *фермиевскими*. Легко видеть, что в силу унитарности S и вещественности $\varphi_\rho(x)$ бозевский ток $j_\rho(x)$ эрмитов. В самом деле, выполняя в первом из (3.4) эрмитово сопряжение и пользуясь унитарностью S-матрицы, получаем

$$j_\rho^+(x) = j_\rho(x). \tag{3.5}$$

Вопрос об эрмитовских свойствах фермиевских токов отложим до § 5.

Для дальнейшего нам будет существенно отметить, что вакуумные средние токов равны нулю:

$$\langle 0 | j_\rho(x) | 0\rangle = 0, \ \langle 0 | \overline{\frown}(x) | 0\rangle = 0, \ \langle 0 | \frown(x) | 0\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Для бозевского тока это следует из инвариантности относительно отражений, а для фермиевских — из инвариантности относительно градиентных преобразований (3.3).

Радиационных операторов второго порядка (простейшего вида (2.17)) в нашем случае можно написать шесть. Ва-

---

1) $\frown$ — грузинская буква «ин».

2) Название *ток* основывается на аналогии с теорией возмущений, где первый из этих операторов в первом приближении будет пропорционален просто $\overline{\psi}\gamma_5\tau_\rho\psi$ — току невзаимодействующих фермиевских частиц. Однако слова «бозевский» и «фермиевский» мы употребляем здесь в несколько необычном смысле, отмечая ими, по какому полю *проводилось варьирование*.

куумные средние четырех из них

$$\left.\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\psi(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = 0, \quad \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\,\delta\overline{\psi}(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = 0, \\ \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = 0, \quad \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\overline{\psi}(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

равны нулю на тех же основаниях, что (3.6).

Итак, если бы мы интересовались только вакуумными средними радиационных операторов, то из операторов второго порядка типа (2.17) нам осталось бы рассмотреть только два оператора

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ \tag{3.8}$$

и

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\psi(y)} S^+ . \tag{3.9}$$

Как мы увидим ниже, для вывода дисперсионных соотношений для мезон-нуклонного рассеяния нам также будет достаточно рассмотреть лишь радиационный оператор (3.8), точнее, его матричный элемент между двумя однонуклонными состояниями. Поэтому мы сосредоточим ниже свое внимание на рассмотрении именно этого оператора, имея в виду, что для других радиационных операторов подобное исследование выглядело бы совершенно аналогично.

3.2. Чтобы пояснить идею плаиируемых выкладок, напомним, что вакуумное среднее от радиационного оператора (3.8) в существенном совпадает с функцией Грина для бозонов, т. е. с вакуумным средиим от T-произведения двух операторов «настоящего» бозонного поля. С другой стороны, в теории свободного поля наряду с T-произведением оказывается весьма полезным рассматривать и различные другие произведения (обычное, симметризованное и т. д.), что приводит к введению наряду с причинной функцией и других сингулярных функций. Мы хотим проделать теперь то же самое здесь, т. е. ввести наряду с радиационным оператором (3.8) другие операторы, связанные с ним так же, как различные сингулярные функции свободного поля связаны с причинной. Введение таких операторов окажется чрезвычайно полезным для дальнейшего.

Вычислим для этой цели вариационную производную от введенного выше оператора тока (3.4.1). Получаем

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ + \frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \frac{\delta S^+}{\delta\varphi_\rho(y)} , \tag{3.10}$$

где один из членов справа как раз совпадает с радиационным оператором (3.8). Второй член справа можно выразить через произведение двух операторов тока, после чего приходим к соотношению

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\,S^+ = -j_{\rho'}(x)\,j_\rho(y) - i\,\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}. \tag{3.11}$$

Левая часть (3.11) симметрична относительно перестановки $\varphi_{\rho'}(x)$ и $\varphi_\rho(y)$. Поэтому, совершая такую перестановку, получим для того же оператора (3.8) еще и другое выражение:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\,S^+ = -j_\rho(y)\,j_{\rho'}(x) - i\,\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}. \tag{3.12}$$

Отдельные члены в правых частях этих выражений являются некоторыми из новых радиационных операторов, которые мы вводим.

3.3. Нетрудно уловить смысл введенных операторов. Действительно, первые члены в правых частях (3.11), (3.12) — это просто произведения токов, т. е. операторы, которые соответствуют сингулярным функциям $D^{(-)}$ и $D^{(+)}$ теории свободного поля. Ниже, рассматривая их матричные элементы, мы увидим, в каком именно смысле они действительно содержат лишь частоты одного знака.

Чтобы выяснить смысл вторых членов в (3.11), (3.12), распишем их через S-матрицу и обратимся к условию причинности **II.** (2) из § 2. Мы увидим тогда, что

$$-i\,\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = \frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(y)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\,S^+\right) = 0, \quad \text{если} \quad y \lesssim x, \tag{3.13}$$

$$-i\,\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} = \frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(y)}\,S^+\right) = 0, \quad \text{если} \quad x \lesssim y, \tag{3.14}$$

т. е. операторы $-i\,\dfrac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}$ и $-i\,\dfrac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}$ ведут себя так же, как опережающая и запаздывающая функции Грина.

Если учесть теперь соотношения (3.13), (3.14), то мы получим из (3.11), (3.12), что

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\,S^+ = \begin{cases} -j_{\rho'}(x)\,j_\rho(y) & \text{при} \quad x \gtrsim y, \\ -j_\rho(y)\,j_{\rho'}(x) & \text{при} \quad y \gtrsim x, \end{cases} \tag{3.15$'$}$$

т. е. *радиационный оператор* (3.8) *выражается через T-произведение бозевских токов*[1]:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\,S^+ = -T\left(j_{\rho'}(x)\,j_\rho(y)\right). \tag{3.15}$$

---

[1]) Подчеркнем, что формулы (3.15′), фактически являющиеся определением фигурирующего в (3.15) T-произведения, определяют

Наконец, выполняя над (3.11), (3.12) антисимметризацию и симметризацию, мы придем к комбинациям, аналогичным сингулярным функциям D и $D^{(1)}$:

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}+i\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}=j_{\rho'}(x)j_\rho(y)-j_\rho(y)j_{\rho'}(x) \tag{3.16}$$

и

$$j_{\rho'}(x)j_\rho(y)+j_\rho(y)j_{\rho'}(x)=-2\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}-i\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}. \tag{3.17}$$

В частности, из (3.16) следует, если учесть (3.13), (3.14), что

$$[j_{\rho'}(x), j_\rho(y)]=0 \quad \text{для} \quad x\sim y, \text{ т. е. } (x-y)^2<0, \tag{3.18}$$

т. е., *что для аналогичного D-функции радиационного оператора сохраняется ее важнейшее свойство — обращаться в нуль вне светового конуса.* Мы хотели бы здесь подчеркнуть, что такая особенность обусловлена наложенным нами требованием причинности (II. (2) из § 2). Более того, рядом авторов именно требование (3.18) использовалось при выводе дисперсионных соотношений в качестве условия причинности [1]).

Для дальнейшего нам понадобится еще соотношение

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}=\left(i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}\right)^+, \tag{3.19}$$

справедливость которого становится очевидной, если вспомнить, что как $j_{\rho'}(x)$, так и $\varphi_\rho(y)$ эрмитовы.

3.4. Перейдем теперь к установлению следствий, которые вытекают для матричных элементов радиационных операторов по любым состояниям из *требования трансляционной инвариантности.* Как хорошо известно, для матричных элементов операторов второго порядка по вакууму это требование приводит к тому, что матричные элементы могут зависеть только от разности $x-y$. Для матричных элементов по любым состояниям положение вещей несколько усложняется, хотя и не принципиально.

Достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением матричных элементов по состояниям с определенным полным импульсом $p, |p, S\rangle$ (остальные квантовые числа обозначаем через S), образующие согласно допущению I. (4) из § 2 полную систему. Итак, рассмотрим, например, матричный элемент между состояниями $|p, S\rangle$ и $|p', S'\rangle$

его лишь для $x\neq y$. Для $x=y$ значение (3.15) остается неопределенным, что скажется ниже в возможности добавить к соответствующим фурье-образам некоторые произвольные полиномы.

[1]) Заметим, что одно требование (3.18) еще не обеспечивает выполнение условия причинности (2.2). Условию (2.2) эквивалентна совокупность условия (3.18) и соответствующих *граничных условий.*

радиациоииого оператора (3.8)

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ \right| p, S \right\rangle.$$

В силу трансляциоиной инвариантности должно быть

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ \right| p, S \right\rangle =$$
$$= \left\langle p', S' \left| e^{i\hat{p}a} \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x-a)\,\delta\varphi_\rho(y-a)} S^+ e^{-i\hat{p}a} \right| p, S \right\rangle =$$
$$= e^{i(p'-p)a} \left\langle p', S' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x-a)\,\delta\varphi_\rho(y-a)} S^+ \right| p, S \right\rangle,$$

где $\hat{p}$ — оператор полного 4-импульса, собственными состояниями которого являются по допущению состояиия $|p, S\rangle$ и $|p', S'\rangle$. Выбирая теперь a равным $\left(\frac{x+y}{2}\right)$, видим, что оператор под знаком матричного элемента оказывается зависящим только от разности $(x-y)$. Следовательно, можно записать:

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ \right| p, S \right\rangle = ie^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(c)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.20}$$

где множитель i добавлен из соображений соответствия с определением сингулярных функций для свободного поля. Тем же определяется и значок c у $F^{(c)}$. Здесь и ниже в формулах (3.20) — (3.25) ради краткости совокупность индексов ρ, p, S обозначена через α, а — ρ', p', S' — через ω.

Совершенно аналогично могут быть представлены матричные элементы и для других радиациоииых операторов второго порядка:

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \right| p, S \right\rangle = -e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.21}$$

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} \right| p, S \right\rangle = -e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.22}$$

$$\langle p', S' \,|\, j_{\rho'}(x) j_\rho(y) - j_\rho(y) j_{\rho'}(x) \,|\, p, S \rangle = -ie^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.23}$$

$$\langle p', S' \,|\, j_{\rho'}(x) j_\rho(y) + j_\rho(y) j_{\rho'}(x) \,|\, p, S \rangle = e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(1)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} + \frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} \right| p, S \right\rangle = -e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} \overline{F}_{\alpha\omega}(x+y). \tag{3.25}$$

3.4.1. Для произведений токов можно, конечно, тоже, с учетом трансляционной инвариантности, выписать выражения:

$$\langle p', S' \mid j_{\rho'}(x) j_\rho(y) \mid p, S \rangle = -ie^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(-)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.26}$$

$$\langle p', S' \mid j_\rho(y) j_{\rho'}(x) \mid p, S \rangle = ie^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(+)}_{\alpha\omega}(x-y). \tag{3.27}$$

Однако здесь можно пойти и дальше и выяснить структуру функции $F^{(-)}_{\alpha\omega}$ более подробно. Именно, в силу *допущения* I. (4) из § 2 *о полноте системы функций* с определенными импульсами, можем разложить матричный элемент в левой части (3.26) в *произведение матричных элементов* тока:

$$\langle p', S' \mid j_{\rho'}(x) j_\rho(y) \mid p, S \rangle = \\ = \int d\mathbf{k} \sum_n \langle p', S' \mid j_{\rho'}(x) \mid \mathbf{k}n \rangle \langle \mathbf{k}n \mid j_\rho(y) \mid p, S \rangle. \tag{3.28}$$

Теперь можно будет воспользоваться требованием трансляционной инвариантности *для каждого* из фигурирующих в (3.28) операторов тока и правая часть примет вид

$$\sum_n \int d\mathbf{k} \, \langle p', S' \mid j_{\rho'}(0) \mid \mathbf{k}n \rangle \langle \mathbf{k}n \mid j_\rho(0) \mid p, S \rangle \, e^{-ik_n(x-y)+ip'x-ipy}. \tag{3.29}$$

Сравнивая это выражение с (3.26), получаем *явный вид функции* $F^{(-)}_{\alpha\omega}$, выраженный теперь только *через матричные элементы токов* в начале координат:

$$F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) = i \sum_n \int d\mathbf{k} \, \langle p'S' \mid j_{\rho'}(0) \mid \mathbf{k}, n \rangle \langle \mathbf{k}, n \mid j_\rho(0) \mid p, S \rangle \times \\ \times e^{\left\{ -i\left(\sqrt{M_n^2+\mathbf{k}^2} - \frac{p^0+p'^0}{2}\right)x^0 + i\left(\mathbf{k}+\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}\right)\mathbf{x} \right\}}, \tag{3.30}$$

где $M_n^2 = k_n^2$, т. е. в состоянии $\mathbf{k}$, n: $k^{0^2} - \mathbf{k}^2 = M_n^2$.

Важность формулы (3.30) состоит в том, что поскольку, как мы установили выше, *различные радиационные операторы* второго порядка *связаны друг с другом* соотношениями типа (3.10—17), то она дает возможность в принципе выразить все радиационные операторы второго порядка через операторы первого порядка. Правда, как мы продемонстрируем в следующем параграфе на примере вакуумных матричных элементов (ср. также дискуссию в конце этого параграфа) при этом необходима известная осторожность в силу сингулярного поведения радиационных операторов при совпадении аргументов.

3.5. Из определений (3.20—27) и полученных ранее соотношений между радиационными операторами следует целый ряд *соотношений между функциями* $F^{(c)}, \ldots, F^{(+)}$. Прежде всего, переставляя в (3.22) и (3.27) x и y, убеждаемся, что

$$F^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(-x) \tag{3.31}$$

и

$$F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) = -P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x), \tag{3.32}$$

где $P_{\rho\rho'}$ означает оператор перестановки индексов ρ и ρ'. Теперь из (3.11) и (3.12) получаем:

$$F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + F^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(-x), \tag{3.33.1}$$

$$F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) = -F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) + F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x) + F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.33.2}$$

Используя еще и (3.16), найдем, что

$$F_{\alpha\omega}(x) = -F^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x) + F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) \tag{3.34}$$

или

$$F_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x) = F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(-x). \tag{3.34'}$$

Сравнивая (3.25) с (3.21) и (3.22), видим, что

$$\overline{F}_{\alpha\omega}(x) = \frac{F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) + F^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x)}{2} = \frac{F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(-x)}{2}. \tag{3.35}$$

Наконец, сравнивая (3.24) с (3.26) и (3.27) и учитывая (3.17), обнаруживаем, что

$$F^{(1)}_{\alpha\omega}(x) = iF^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - iF^{(+)}_{\alpha\omega}(x) = i\left(F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x)\right) \tag{3.36.1}$$

и

$$F^{(1)}_{\alpha\omega}(x) = 2iF^{(c)}_{\alpha\omega}(x) - iF^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) - iF^{\text{adv}}_{\alpha\omega}(x) =$$
$$= 2i\left(F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) - \overline{F}_{\alpha\omega}(x)\right). \tag{3.36.2}$$

Выпишем еще *соотношения эрмитова сопряжения*. Выполняя в (3.30) комплексное сопряжение, найдем, что

$$F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) = -F^{*(-)}_{\omega\alpha}(-x). \tag{3.37}$$

Далее, из (3.19) легко получить, что

$$F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{\text{ret}*}_{\omega\alpha}(x). \tag{3.38}$$

С помощью этих формул и выражеиий (3.34′), (3.35) функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$ через $F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}$ легко получить и правила для сопряжения функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$:

$$F^{*}_{\omega\alpha}(x) = P_{\rho\rho'} F_{\alpha\omega}(x); \qquad \overline{F}^{*}_{\omega\alpha}(x) = P_{\rho\rho'} \overline{F}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.39}$$

Одиако полиое эрмитово сопряжение должио включать в себя, кроме комплексного сопряжения и перестановки индексов α и ω, еще и замену x на $-x$ (перестановку x и y). Чтобы устаиовить правила для такого сопряжения, выясним свойства симметрии функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$, представляющие и самостоятельный интерес. Эти свойства совершенно очевидны из (3.34′), (3.35):

$$F_{\alpha\omega}(-x) = -P_{\rho\rho'} F_{\alpha\omega}(x); \qquad \overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = P_{\rho\rho'} \overline{F}_{\alpha\omega}(x) \tag{3.40}$$

и отличаются от свойств симметрии соответствующих свободных сингулярных функций лишь появлением оператора $P_{\rho\rho'}$, вырождающегося в случае свободного поля в единичный.

С помощью (3.40) можно сразу написать

$$\left.\begin{aligned} F^{+}_{\alpha\omega}(x) &= F^{*}_{\omega\alpha}(-x) = -F_{\alpha\omega}(x); \\ \overline{F}^{+}_{\alpha\omega}(x) &= \overline{F}^{*}_{\omega\alpha}(-x) = \overline{F}_{\alpha\omega}(x), \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

т. е. *матрица* $F_{\alpha\omega}(x)$ *антиэрмитова, а матрица* $\overline{F}_{\alpha\omega}(x)$ *эрмитова.* Замечая теперь, что

$$\left.\begin{aligned} F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x) &= \overline{F}_{\alpha\omega}(x) + \frac{1}{2} F_{\alpha\omega}(x), \\ F^{\text{ret}*}_{\omega\alpha}(-x) &= \overline{F}_{\alpha\omega}(x) - \frac{1}{2} F_{\alpha\omega}(x), \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

видим, что $\overline{F}_{\alpha\omega}(x)$ представляет собой *эрмитову часть запаздывающей матрицы* $F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x)$, а $\frac{1}{2i} F_{\alpha\omega}(x)$ — *антиэрмитову*.

3.6. Возвращаясь теперь к свойствам симметрии (3.40), видим, что из эрмитовой и антиэрмитовой частей матрицы $F^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(x)$ можно образовать две комбинации, *четные* отиосительио отражения $x \to -x$:

$$(1 - P_{\rho\rho'}) F_{\alpha\omega}(-x) = (1 - P_{\rho\rho'}) F_{\alpha\omega}(x) \tag{3.43}$$

$$(1 + P_{\rho\rho'}) \overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = (1 + P_{\rho\rho'}) \overline{F}_{\alpha\omega}(x), \tag{3.44}$$

и две *нечетные* комбинации:

$$(1+P_{\rho\rho'})\,F_{\alpha\omega}(-x) = -(1+P_{\rho\rho'})\,F_{\alpha\omega}(x) \tag{3.45}$$

и

$$(1-P_{\rho\rho'})\,\overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = -(1+P_{\rho\rho'})\,\overline{F}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.46}$$

Эти свойства симметрии, переписанные в импульсном представлении, дадут нам возможность ниже, при выводе дисперсионных соотношений, избавиться от интегрирования по отрицательным значениям энергии.

3.7. Вернемся, в заключение, еще раз к обсуждению соотношений (3.15). Как мы уже подчеркивали, они выражают возникающую в теории весьма любопытную ситуацию. С одной стороны, (3.15′) *выражает радиационный оператор* $\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}S^+$ второго порядка через произведение двух токов, т. е. через *радиационные операторы первого порядка*. С другой стороны, такое сведение операторов второго порядка к операторам первого порядка не удается провести полностью: формулы (3.15′) *ничего не говорят* о значении радиационного оператора второго порядка при *совпадении* точек x и y (точнее, конечно, о правилах интегрирования в окрестности $x=y$). Можно было бы сказать, что радиационный оператор второго порядка $\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}S^+$ сводится к радиационным операторам первого порядка *с точностью до произвольного квазилокального оператора*. (Определение квазилокальных операторов см. [16].) При переходе к импульсному представлению этот квазилокальный оператор выразится в виде добавляющегося к фурье-образу *произвольного полинома*. (Ср. ниже дискуссию в § 4 после (4.38).) Этот результат весьма близок к полученному одним из авторов (Н.Н.Б.) и Ширковым [16] при построении теории S-матрицы на основе разложения по малому параметру связи. Существенные отличия состоят, однако, в том, что, во-первых, эти авторы, имея в своем распоряжении лагранжиан, могли определить с его помощью степень произвольного полинома и, во-вторых, что входящие в произвольные полиномы при различных степенях постоянные удавалось в конце объединить в одном обобщенном лагранжиане. При нашем же пути построения теории вообще без использования лагранжиана *степень полинома* приходится *вводить* в теорию как некоторое *новое требование*, опираясь, естественно, на соответствие с экспериментом.

Возникающая для радиационного оператора второго порядка ситуация является не исключением, но правилом и для всех радиационных операторов высших порядков. Именно, последовательным применением условия причинности (2.24) можно показать, что любой радиационный оператор ($l+m+$ $+n$)-го порядка сводится к хронологическому произведению токов:

$$\frac{\delta^{l+m+n}S}{\delta\overline{\psi}(x_1)\ldots\delta\overline{\psi}(x_l)\,\delta\psi(y_1)\ldots\delta\psi(y_m)\,\delta\varphi(z_1)\ldots\delta\varphi(z_n)}S^+ =$$
$$= i^{l+3m+3n}\,T(\frown(x_1)\ldots\frown(x_l)\overline{\frown}(y_1)\ldots$$
$$\ldots\overline{\frown}(y_m)\,j(z_1)\ldots j(z_n)). \quad (3.47)$$

Отсюда, конечно, немедленно будет следовать, что любые матричные элементы такого оператора *для всех различных аргументов* $x_1, \ldots, z_n$ будут выражаться через матричные элементы токов с помощью сумм, аналогичных (3.30). Однако при каждом *совпадении* каких-либо точек $x_1, \ldots, z_n$ будет возникать связанный с недоопределенностью T-произведения произвол, который можно будет выразить добавлением произведения *произвольного квазилокального оператора* от совпавших точек на токи в остальных точках. Более подробное развитие этих идей вывело бы нас далеко за рамки вывода дисперсионных соотношений и, возможно, могло бы послужить основой нового подхода к построению квантовой теории поля.

§ 4. ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ БОЗЕВСКИХ РАДИАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1])

4.1. В этом параграфе мы займемся более подробным исследованием *средних по вакууму* от рассмотренных в § 3 радиационных операторов. Они будут определяться общими формулами (3.20)—(3.27), в правых частях которых теперь выпадет множитель $e^{-i\frac{p-p'}{2}(x+y)}$, а индексы α и ω превратятся просто в ρ и ρ', например,

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = iF^{(c)}_{\rho\rho'}(x-y).$$

Далее, вследствие изотопической инвариантности зависимость от изотопических индексов станет диагональной, и мы будем писать

$$F^{(?)}_{\rho\rho'}(x) = \delta_{\rho\rho'} f^{(?)}(x), \tag{4.1}$$

где (?) означает один из значков $(c) \ldots (+)$.

---

1) Материал этого и следующего параграфов, хотя и не имеющий прямого отношения к дисперсионным соотношениям, включен нами в изложение с целью пояснить основной метод аналитического продолжения и проиллюстрировать положения § 2 на возможно более простом примере. При выводе спектральных представлений радиационных операторов второго порядка существо метода не затемняется многочисленными деталями сложных рассуждений, которые будут необходимы при выводе дисперсионных соотношений в §§ 6 и 7. Поэтому читатель, интересующийся лишь доказательством дисперсионных соотношений, может опустить §§ 4 и 5.

Начнем с рассмотрения представления (3.30) $F^{(-)}_{\alpha\omega}$ через матричные элементы токов, которое запишется теперь как

$$\delta_{\rho\rho'} f^{(-)}(x) = i \sum_n \int d\mathbf{k} \langle 0 | j_{\rho'}(0) | \mathbf{k}, n\rangle \langle \mathbf{k}, n | j_\rho(0) | 0\rangle e^{-ik_n^0 x^0 + i\mathbf{kx}}. \tag{4.2}$$

Покажем, что в сумме (4.2) младшие члены отсутствуют.

Действительно, член с $n = 0$ (вакуум)[1]) обращается в нуль в силу (3.6). Будем считать, что в сумме (4.2) низшими энергетическими состояниями после вакуума являются состояния с одним, двумя, тремя и т. д. мезонами (т. е. будем считать, что не существует связанных комплексов мезонов и нуклонов с массой, меньшей $3m$ — трех мезонных масс). Тогда обратится в нуль и член в (4.2) с $n = 1$ мезону. В самом деле, если взять матричный элемент между вакуумом $\langle 0|$ и одномезонным состоянием $|1, \mathbf{k}\rangle$ от второго из равенств (2.20), то в левой части возникнет выражение

$$\langle 0 | a^{(-)}_{\rho'}(\mathbf{p}) S | 1, \mathbf{k}\rangle - \langle 0 | S a^{(-)}_{\rho'}(\mathbf{p}) | 1, \mathbf{k}\rangle,$$

тождественно равное нулю, так как в силу условия стабильности I. (6) из § 2 S можно будет втянуть в обрамляющие $a^{(-)}$ амплитуды состояния. Поэтому

$$\int dx \left\langle 0 \left| \frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \right| 1,\mathbf{k} \right\rangle \frac{e^{ipx}}{2\sqrt{p^0}} = 0, \qquad p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Но

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \right| 1,\mathbf{k} \right\rangle = \frac{1}{i} \langle 0 | j_{\rho'}(x) | 1, \mathbf{k}\rangle = \frac{1}{i} \langle 0 | j_{\rho'}(0) | 1,\mathbf{k}\rangle e^{-ikx},$$

и потому предыдущий интеграл дает просто δ-функцию, и мы приходим к тождеству

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})\, \delta\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\right) \langle 0 | j_{\rho'}(0) | 1,\mathbf{k}\rangle = 0,$$

из которого немедленно следует, в силу произвольности $\mathbf{p}$,

$$\langle 0 | j_{\rho'}(0) | 1, \mathbf{k}\rangle = 0.$$

---

[1]) Мы надеемся, что читатель не будет введен в заблуждение тем, что мы иногда используем букву n, — означающую всю совокупность описывающих состояние квантовых чисел, кроме импульса, — также и просто для обозначения *числа частиц* в соответствующем состоянии (ср. [22], стр. 252).

Равенство нулю матричного элемента $\langle 1 | j_\rho(0) | 0 \rangle$ выводится так же. Наконец, в силу псевдоскалярности мезонов будут равны нулю и матричные элементы тока между вакуумом и двумезонными состояниями.

Итак, сумма в (4.2) начинается только с трехмезонных состояний, т. е. наименьшее значение k_n^0 есть $3m$.

4.2. Перепишем сумму (4.2) в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\delta_{\rho\rho'}\, f^{(-)}(x) = \\ = i \int dk \sum_{n \geqslant 3} \langle 0 | j_{\rho'}(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | j_\rho(0) | 0 \rangle e^{-ikx} \times \\ \times \delta\left(k^0 - \sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}\right). \quad (4.3)$$

Вводя теперь фурье-образы для всех функций $f^{(?)}(x)$ с помощью определения

$$f^{(?)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\, e^{-ikx} g^{(?)}(k), \quad (4.4)$$

видим, что (в силу пропорциональности левой части (4.3) $\delta_{\rho\rho'}$, правая часть должна быть равна нулю при $\rho \neq \rho'$ и давать одинаковые результаты для любого $\rho = \rho'$)

$$g^{(-)}(k) = (2\pi)^4 i \sum_{n \geqslant 3} |\langle 0 | j_\rho(0) | n, \mathbf{k} \rangle|^2 \delta\left(k^0 - \sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}\right). \quad (4.5)$$

Однако, с другой стороны, из псевдоскалярности $\varphi_\rho(x)$ следует, что функции $f^{(-)}(x)$, а, следовательно, и $g^{(-)}(k)$, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца, *исключая отражения времени*. Поэтому $g^{(-)}(k)$ может зависеть в действительности только от k^2 и знака k^0, т. е. от $\theta(k^0)$. Но из (4.5) видно, что она содержит только положительные частоты. Поэтому ясно, что можно написать

$$g^{(-)}(k) = 2\pi i\, \theta(k^0)\, I(k^2), \quad (4.6)$$

где функция I зависит уже только от k^2. Сравнивая это выражение с (4.5), заметим, что (4.5) можно переписать как

$$g^{(-)}(k)=$$
$$=(2\pi)^4 i \sum_{n\geqslant 3} |\langle 0 | j_\rho(0) | n,\mathbf{k}\rangle|^2 \, 2\sqrt{M_n^2+\mathbf{k}^2}\, \delta(k^2-M_n^2)\, \theta(k^0). \tag{4.5'}$$

Таким образом, мы представили $g^{(-)}(k)$, — которая в силу (4.6) должна выражаться в виде произведения инвариантной функции на $\theta(k^0)$, — в виде произведения $\theta(k^0)$ на функцию, явно не зависящую от выбора направления времени. Тем самым мы можем утверждать, что

$$I(k^2)=(2\pi)^3 \sum_{n\geqslant 3} |\langle 0 | j_\rho(0) | n,\mathbf{k}\rangle|^2 \, 2\sqrt{M_n^2+\mathbf{k}^2}\, \delta\left(k^2-M_n^2\right). \tag{4.7}$$

Из (4.7) следуют немедленно два основных свойства функции $I(k^2)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ I(k^2)=0 \text{ для } k^2\leqslant(3m)^2; \\ 2.\ I(k^2)\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Заметим еще, что в силу (4.8.1) (4.6) можно переписать в виде

$$g^{(-)}(k)=2\pi i\theta(k^0)\int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \delta(k^2-m^2)\, I(m^2)\, dm^2=$$
$$=\int\limits_{(3m)^2}^{\infty} g_0^{(-)}(k,\ m^2)\, I(m^2)\, dm^2. \tag{4.9}$$

Это так называемое «спектральное» представление для функции, чрезвычайно просто связанной (см. ниже) с $g^{(-)}(k)$, было получено впервые Леманом [19] и Челленом [20]. Ими же были установлены и свойства (4.8).

4.3. Итак,

$$\langle 0 | j_{\rho'}(x)\, j_\rho(y) | 0\rangle=\delta_{\rho\rho'}\int dk\, e^{-ik(x-y)}\, \theta(k^0)\, I(k^2). \tag{4.10}$$

Производя здесь замену $x \longleftrightarrow y$, получим

$$\langle 0 | j_\rho(y)\, j_{\rho'}(x) | 0\rangle=\delta_{\rho\rho'}\int dk\, e^{-ik(x-y)}\, \theta(-k^0)\, I(k^2). \tag{4.11}$$

Этим оправдываются введенные ранее значки $(-)$ и $(+)$: отрицательно-частотная функция действительно содержит только отрицательные, а положительно-частотная — положительные частоты. Подчеркнем, что это обстоятельство показано только для вакуумных матричных элементов, для матричных элементов по произвольным состояниям это свойство может, вообще говоря, и не выполняться.

Вспоминая теперь соотношения (3.33), переходя в них к фурье-образам с помощью (4.4) и подставляя выражение (4.6) для $g^{(-)}(k)$ и следующее из (4.11) выражение

$$g^{(+)}(k) = -2\pi i\,\theta(-k^0)\,I(k^2) \tag{4.12}$$

для $g^{(+)}(k)$, получаем:

$$g^c(k) = 2\pi i\,\theta(k^0)\,I(k^2) + g^{\mathrm{adv}}(k), \tag{4.13$'$}$$

$$g^c(k) = 2\pi i\,\theta(-k^0)\,I(k^2) + g^{\mathrm{ret}}(k). \tag{4.13$''$}$$

Из этих формул получается одно чрезвычайно важное следствие. Именно, благодаря только что установленному свойству (4.8.1) спектральной функции $I(k^2)$, мы видим, что при малых импульсах $k^2 < (3m)^2$ фурье-образы всех трех функций $g^{(c)}$, g^{adv} и g^{ret} совпадают:

$$g^c(k) = g^{\mathrm{adv}}(k) = g^{\mathrm{ret}}(k) \quad \text{при} \quad k^2 < (3m)^2. \tag{4.14}$$

Это обстоятельство послужит нам основой при установлении аналитических свойств функций $g^{(-)}(k)$, $g^{\mathrm{adv}}(k)$, $g^{\mathrm{ret}}(k)$, которым мы сейчас займемся.

4.4. Рассмотрим подробнее фурье-образ

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = \int f^{\mathrm{ret}}(x)\,e^{ikx}\,dx,$$

в котором в силу условия причинности

$$f^{\mathrm{ret}}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \lesssim 0. \tag{4.15}$$

Покажем, что этот фурье-образ можно продолжить в область комплексных k, заменив

$$k \to k = p + i\Gamma; \qquad p = \operatorname{Re} k; \qquad \Gamma = \operatorname{Im} k,$$

если 4-вектор Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma > 0, \tag{4.16}$$

а p — любое.

Имеем тогда

$$g^{\text{ret}}(k) = \int f^{\text{ret}}(x)\, e^{ipx}\, e^{-\Gamma x}\, dx = g^{\text{ret}}(p + i\Gamma).$$

Ясно, что в этом интеграле экспонента $e^{-\Gamma x}$ будет режущим фактором, обеспечивающим его сходимость. Действительно, мы всегда можем в силу (4.16) выбрать систему отсчета, в которой $\Gamma = 0$, следовательно, экспонента примет вид

$$e^{-\Gamma^0 x^0}, \quad \Gamma^0 > 0.$$

Но согласно (4.15) интегрирование производится фактически лишь по внутренности верхней половины светового конуса, где $x^0 \geqslant 0$ и $\leqslant x_0^2$.

Следовательно, функция $h(x) = e^{ipx}\, e^{-\Gamma x}$ будет принадлежать некоторому классу $C(q, r)$ [1]), в котором

$$h_{mn} = \sup |x|^m \left| \frac{\partial^n h(x)}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_n}} \right| \leqslant \text{const}$$

для любых $m = 0, 1, \ldots, r$; $n = 0, 1, \ldots, q$.

С другой стороны, согласно условию II.(1) из § 2 функция $f^{\text{ret}}(x)$ должна быть интегрируемой и потому интеграл

$$\int f^{\text{ret}}(x)\, h(x)\, dx = \int f^{\text{ret}}(x)\, e^{ipx} e^{-\Gamma x}\, dx \tag{4.17}$$

можно рассматривать как линейный функционал в пространстве функций $h(x)$. Следовательно, будут сходиться как сам интеграл (4.17), так и его производные по k:

$$i^s \int f^{\text{ret}}(x)\, x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_s}\, e^{ikx}\, dx.$$

Таким образом, $g^{\text{ret}}(k)$ будет аналитической функцией k в области (4.16).

Заметим далее, что интеграл (4.17), будучи линейным функционалом в $C(q, r)$, должен быть тем самым ограничен по абсолютной величине линейной комбинацией величин h_{mn}. Поскольку производные от e^{ikx} по x пропорциональны степеням k, то мы видим отсюда, что функция $g^{\text{ret}}(k)$ возрастает на бесконечности не быстрее некоторого полинома по k (разумеется, мы имеем здесь дело с областью k, в которой неравенства (4.16) не ослабляются).

---

[1]) См. сноску на стр. 9.

Фурье-образ $g^{\text{ret}}(k)$ для действительного k мы можем теперь *определить* как несобственный предел интеграла (4.17)

$$\lim_{\Gamma > 0,\ \Gamma \to 0} g^{\text{ret}}(p + i\Gamma) = g^{\text{ret}}(p). \tag{4.18}$$

4.5. Совершенно аналогично показывается, что фурье-образ

$$g^{\text{adv}}(k) = \int f^{\text{adv}}(x)\, e^{ikx}\, dx \tag{4.19}$$

можно продолжить в комплексную плоскость с условием

$$\Gamma < 0 \tag{4.20}$$

и определить после этого интеграл (4.19) как несобственный предел

$$\lim_{\Gamma < 0,\ \Gamma \to 0} g^{\text{adv}}(p + i\Gamma) = g^{\text{adv}}(p). \tag{4.21}$$

Таким образом, мы ввели две функции $g^{\text{ret}}(k)$ и $g^{\text{adv}}(k)$ и доказали их аналитичность в областях (4.16) и (4.20) соответственно.

4.6. Легко видеть, что из выведенного ранее соотношения четности (3.31) следует, что между введенными функциями

$$\left.\begin{aligned} g^{\text{ret}}(k) &= g^{\text{ret}}(p + i\Gamma) = \int\limits_{\Gamma > 0} f^{\text{ret}}(x)\, e^{ipx}\, e^{-\Gamma x}\, dx \\ &\text{и} \\ g^{\text{adv}}(k) &= g^{\text{adv}}(p + i\Gamma) = \int\limits_{\Gamma < 0} f^{\text{adv}}(x)\, e^{ipx}\, e^{-\Gamma x}\, dx \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

существует соотношение

$$g^{\text{adv}}(-p - i\Gamma) = g^{\text{ret}}(p + i\Gamma), \tag{4.23}$$

$$\Gamma > 0.$$

4.7. Для дальнейших рассуждений фиксируем систему отсчета, выбрав ее так, чтобы $\mathbf{\Gamma} = 0$. В силу времениподобности Γ это всегда возможно и никак не ограничивает общности.

Займемся сначала функцией g^{ret}; функцию g^{adv} всегда можно будет получить из нее с помощью (4.23). Из соображений релятивистской инвариантности $f^{\text{ret}}(x)$ может зависеть в действительности только от x^2 и $\operatorname{sign} x^0$. Но тогда из (4.22) видно, что значения интеграла (4.22) для двух каких-либо значений k, связанных преобразованием Лоренца L^+, не включающим отражения времени, будут просто совпадать. Но любые два комплексных вектора k, для которых определен интеграл (4.22), обязательно связаны преобразованием L^+, поскольку только такие преобразования сохраняют условие $\Gamma^0 > 0$. Следовательно, левая часть (4.22) является для всех k, удовлетворяющих условию $\Gamma^2 > 0$, $\Gamma^0 > 0$, *функцией только от* k^2. Итак, $g^{\text{ret}}(p + i\Gamma)$ является некоторой аналитической функцией $G(k^2)$ только от k^2:

$$g^{\text{ret}}(p + i\Gamma) = G(k^2), \tag{4.23'}$$

определенной лишь для таких k, для которых

$$(\operatorname{Im} k)^2 > 0; \quad \operatorname{Im} k^0 > 0.$$

Чтобы найти область аналитичности этой функции на комплексной плоскости k^2, заметим, что в силу доказанной аналитичности $f^{\text{ret}}(p + i\Gamma)$ в верхней полуплоскости по Γ^0, функция $G(k^2)$ будет, очевидно, аналитична в некоторой точке

$$\left.\begin{aligned} k^2 = \zeta = \xi + i\eta; \\ \xi = p^2 - \Gamma^{02}; \quad \eta = 2p^0\Gamma^0, \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

коль скоро можно найти хотя бы один вектор $k = \{p_0 + i\Gamma^0, \mathbf{p}\}$, удовлетворяющий (4.24), временная комплексная составляющая которого лежала бы строго в верхней полуплоскости. Но из связывающих $\zeta = \xi + i\eta$ и k формул (4.24) сразу видно, что это всегда можно сделать для любых точек комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, исключая действительную положительную полуось

$$\eta = \operatorname{Im}(k^2) = 0; \qquad \xi = \operatorname{Re}(k^2) \geqslant 0. \tag{4.25}$$

Итак, функция $G(k^2)$ аналитична в комплексной плоскости k^2 всюду, исключая действительную положительную полуось. Но функция $G(k^2)$ — это функция одного скалярного переменного, и она «не знает», возведением в квадрат какого вектора возник этот аргумент. Поэтому сделанная после (4.23') оговорка теперь уже не нужна — $G(k^2)$ будет аналитической функцией для любых комплексных векторов k, квадрат которых не есть вещественное положительное число. Наконец, в силу замечания после формулы (4.17), на бесконечности $G(k^2)$ может возрастать не быстрее полинома.

4.8. Определим теперь две (вообще говоря, обобщенные) функции $G_+(p^2)$ и $G_-(p^2)$ как несобственные пределы:

$$G_+(p^2) = \lim_{\operatorname{Im} k^2 \to 0} G(k^2), \text{ причем } \operatorname{Im}(k^2) > 0, \operatorname{Re}(k^2) > 0 \quad (4.26.1)$$

и

$$G_-(p^2) = \lim_{\operatorname{Im} k^2 \to 0} G(k^2), \text{ причем } \operatorname{Im}(k^2) < 0, \operatorname{Re}(k^2) > 0. \quad (4.26.2)$$

Сравнивая с помощью формул (4.24) предельный переход на действительную ось в функции $f^{\text{ret}}(k)$ и в $G(k^2)$ при условии $\operatorname{Re}(k^2) > 0$, видим, что

$$g^{\text{ret}}(p) = \left\{ \begin{matrix} G_+(p^2) & p^0 > 0, \\ G_-(p^2) & p^0 < 0; \end{matrix} \right\} \quad (4.27)$$
$$p^2 > 0.$$

Свойство симметрии (4.23) дает нам теперь немедленно

$$g^{\text{adv}}(p) = \left\{ \begin{matrix} G_-(p^2) & p^0 > 0, \\ G_+(p^2) & p^0 < 0; \end{matrix} \right\} \quad (4.28)$$
$$p^2 > 0.$$

Итак, мы получили выражения для обобщенных функций $g^{\text{ret}}(p)$ и $g^{\text{adv}}(p)$ в виде несобственных пределов некоторой одной аналитической функции $G(k^2)$. Обращаясь опять к (4.24), найдем, что эти предельные соотношения можно записать и в более простом и симметричном виде:

$$g^{\text{ret}}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 + i\varepsilon p^0) \quad (4.29.1)$$

и

$$g^{\text{adv}}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 - i\varepsilon p^0). \quad (4.29.2)$$

Замечая теперь еще, что в силу (4.13)

$$g^c(p) = \begin{cases} g^{\text{adv}}(p) & p^0 < 0, \\ g^{\text{ret}}(p) & p^0 > 0, \end{cases}$$

видим, что функцию $g^c(p)$ можно записать в виде несобственного предела

$$g^c(p) = G_+(p^2) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 + i\varepsilon)\,^{1)}. \qquad (4.29.3)$$

Наконец, вычитая (4.13″) из (4.13′), находим, имея в виду (4.27) и (4.28), для разности предельных значений на линии разреза

$$G_+(p^2) - G_-(p^2) = 2\pi i I(p^2). \qquad (4.30)$$

Из установленного ранее первого свойства (4.8.1) спектральной функции $I(p^2)$ видно теперь, что линией разреза на комплексной плоскости k^2 для $G(k^2)$ будет не вся действительная положительная полуось, но лишь ее часть

$$\operatorname{Im}(k^2) = 0; \qquad \operatorname{Re}(k^2) \geqslant (3m)^2. \qquad (4.31)$$

4.9. Установленные нами свойства аналитичности функции $G(\zeta)$ и то ее свойство, что она возрастает на бесконечности не быстрее некоторого полинома от ζ, позволят нам построить через посредство только что выведенных предельных формул (4.29), для функций $g^c(k)$, $g^{\text{ret}}(k)$ и $g^{\text{adv}}(k)$ спектральные представления того же типа, что и полученное выше представление для $g^{(-)}(k)$. Для этой цели мы воспользуемся подробно обсуждавшейся в § 1 интегральной формулой Коши.

Будем считать, что функция $G(\zeta)$ возрастает на бесконечности не быстрее ζ^n. Тогда согласно § 1 интегральную формулу Коши можно применять, отбрасывая интегрирование по большому кругу, к функции

$$h(\zeta) = \frac{G(\zeta)}{(\zeta - m^2)^{n+1}}, \qquad (4.32)$$

которая будет обладать, кроме линии разреза от $(3m)^2$ до ∞, еще и полюсом при $\zeta = m^2$. Поэтому контур интегрирования мы выберем следующим образом: выходя из начала координат, он пройдет несколько выше действительной оси к $+\infty$, затем включит в себя большой круг и возвратится в начало координат, проходя несколько

---

[1]) Заметим, что в формулах (4.29) мы опустили указание на временипод́обность вектора p на том основании, что для $p^2 < 0$ функция $G(p^2)$ регулярна и, следовательно, способ предельного перехода просто безразличен.

ниже действительной оси. В силу свойств функции $h(\zeta)$ интеграл по такому контуру сведется к разности интегралов по верхнему и нижнему берегу линии разреза и малому контуру C_m^- вокруг точки $\zeta = m^2$, проходимому в отрицательном смысле. Итак, можем написать:

$$G(\zeta) = \frac{(\zeta - m^2)^{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{C_m^-} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - m^2)^{n+1}} \frac{G(\zeta')}{\zeta' - \zeta} + \frac{(\zeta - m^2)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{G_+(\zeta') - G_-(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)(\zeta' - m^2)^{n+1}} d\zeta'.$$

Вместо разности интегралов по верхнему и нижнему берегу линии разреза мы написали здесь, в соответствии с определениями (4.26), разность $G_+(\zeta) - G_-(\zeta)$. Интеграл по C_m^- дает

$$\frac{1}{2\pi i} (\zeta - m^2)^{n+1} \oint\limits_{C_m^-} \frac{d\zeta' G(\zeta')}{(\zeta' - m^2)^{n+1} (\zeta' - \zeta)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\zeta - m^2)^j}{j!} G^{(j)}(m^2),$$

и поэтому

$$G(k^2) = (k^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1} (\zeta - k^2)} + \sum_{j=0}^{n} G^j(m^2) \frac{(k^2 - m^2)^j}{j!}. \qquad (4.33)$$

Эту формулу можно рассматривать как спектральное представление для функции $G(k^2)$, в котором фигурирует та же спектральная функция $I(k^2)$, что и в (4.10), (4.11).

4.10. Выполняя теперь соответствующие предельные переходы, получаем спектральные представления и для непосредственно интересующих нас функций $g^c(p^2)$, $g^{\text{ret}}(p^2)$ и $g^{\text{adv}}(p^2)$:

$$g^c(p^2) = G_+(p^2) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1} (\zeta - p^2 - i\varepsilon)} + \sum_{j=0}^{n} G^{(j)}(m^2) \frac{(p^2 - m^2)^j}{j!}, \qquad (4.34.1)$$

$$g^{\binom{\mathrm{ret}}{\mathrm{adv}}}(p) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - p^2 \mp i\varepsilon p^0)} + \\ + \sum_{j=0}^{n} G^{(j)}(m^2) \frac{(p^2 - m^2)^j}{j!}. \quad (4.34.2)$$

Установим теперь некоторые свойства по существу неопределенных коэффициентов $G^{(j)}(m^2), \ldots$, входящих в (4.33), (4.34).

Покажем прежде всего, что коэффициент G^0 равен нулю. Рассмотрим для этого матричный элемент S-матрицы между двумя одномезонными состояниями $|\mathbf{p}', \rho'\rangle$ и $|\mathbf{p}, \rho\rangle$. Согласно (2,9) он будет равен

$$\langle \mathbf{p}', \rho' | S | \mathbf{p}, \rho \rangle = \langle 0 | a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{p}') S a_{\rho}^{(+)}(\mathbf{p}) | 0 \rangle.$$

Переставляя здесь амплитуды рождения налево, а амплитуды уничтожения направо с помощью перестановочных соотношений (2.25) и (2.10) и пользуясь определением функции $g^c(p)$, получим для этого матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}', \rho' | S | \mathbf{p}, \rho \rangle = \\ = \langle 0 | a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{p}') a_{\rho}^{+}(\mathbf{p}) | 0 \rangle + \frac{i\pi\delta_{\rho\rho'}}{p^0} \delta(p' - p) g^c(p), \quad (4.35)$$

$$p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}; \qquad p'^0 = +\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}.$$

Но, с другой стороны, в силу условия стабильности одночастичных состояний I.(6) из § 2 этот матричный элемент равен одному лишь первому члену правой части (4.35). Итак[1],

$$g^c(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^2 = m^2,$$

откуда следует

$$G^{(0)} = 0. \quad (4.36)$$

Покажем теперь, что все константы $G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}$ должны быть вещественными. Это утверждение доказывается немедленно, если заметить, что из соотношения сопряжения

$$f^{(\mathrm{ret})}(x) = f^{(\mathrm{ret})*}(x) \quad (3.38)$$

следует

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = g^{(\mathrm{ret})*}(-k), \quad (4.37)$$

а интеграл (4.34.2) сам обладает этим свойством.

---

[1]) Этот результат является, конечно, совершенно естественным, поскольку он выражает просто то обстоятельство, что в теории, оперирующей с самого начала с реальными частицами, не может быть перенормировок одночастичных состояний и вакуума.

Итак, фурье-образы всех трех гринообразных матричных элементов — запаздывающего, опережающего и причинного — допускают спектральное представление вида

$$g^{(c)}(p^2) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1} (\zeta - p^2 - i\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{n} C_i (m^2 - p^2)^i, \qquad (4.38\ 1)$$

$$g^{\left(\substack{\text{ret}\\ \text{adv}}\right)}(p) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1} (\zeta - p^2 \mp i\varepsilon p^0)} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i (m^2 - p^2)^i; \qquad (4.38.2)$$

C_i — вещественны.

4.11. С помощью полученных в § 3 соотношений между радиационными операторами из спектральных представлений (4.38) можно получить спектральные представления и для вакуумных матричных элементов всех остальных радиационных операторов. Заметим, что при образовании линейных комбинаций, соответствующих всем «негринообразным» матричным элементам ($g^{(+)}$, $g^{(-)}$, g и $g^{(1)}$), входящие в (4.38) неопределенные полиномы уничтожатся, а под интегралами возникнут $\delta(\zeta - p^2)$, благодаря которым множители $(p^2 - m^2)^n$ вне и внутри интегралов сократятся, и мы получим представление в точности такого же вида, как найденное выше представление (4.9) для $g^{(-)}$. Для гринообразной функции $\bar{g}$ получится представление типа (4.38) с заменой $\frac{1}{\zeta - p^2 - i\varepsilon}$ на $P\frac{1}{\zeta - p^2}$.

Итак, мы выяснили, что по отношению к спектральным представлениям их вакуумных матричных элементов все радиационные операторы второго порядка разделяются на две группы. Для матричных элементов «негринообразных» операторов получаются простые спектральные представления типа (4.9), в то время как для «гринообразных» — сложные представления типа (4.38). Эти последние были получены нами довольно громоздким путем через исследование аналитического поведения соответствующих функций.

Можно было бы попробовать поступить и иначе — непосредственно переходить от спектрального представления (4.9) для $g^{(-)}(k)$ и аналогичного для $g^{(+)}(k)$ к спектральным представлениям для «гринообразных» функций с помощью, например для $g^c(k)$, формул типа (3.15′). Прямая выкладка привела бы нас тогда к спектральному представлению «простого» типа

$$g^c(k) = \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{dm^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} I(m^2) \tag{4.39}$$

для g^c и таким же представлениям, отличающимся лишь способом обхода полюса при $m^2 = k^2$, для других «гринообразных» функций. Именно такой путь был избран в работе Лемана [19].

Однако в действительности эти простые представления оказались бы, вообще говоря (если не налагать жесткого ограничения на порядок роста спектральной функции на бесконечности), лишенными смысла, поскольку интеграл по m^2 будет расходиться. Действительно, для «негринообразных» функций ядра спектральных представлений обязательно содержат δ-функцию, почему интегрирование в формулах типа (4.9) фактически производится лишь в окрестности одной точки, и поведение $I(m^2)$ на бесконечности для сходимости интеграла несущественно. В спектральных же представлениях типа (4.39) для «гринообразных» функций интегрирование, напротив, эффективно распространяется на весь интервал $(-\infty, +\infty)$, что приведет к расходимости при недостаточно быстром убывании $I(m^2)$ на ∞.

Причина этой разницы в поведении по существу ясна уже из формул (3.15′). В самом деле, эти формулы определяют функцию $F^c_{\alpha\omega}(x-y)$ только для $x > y$ или $x < y$. Значение же ее при $x = y$ остается неопределенным. В силу же известной сингулярности всех F-функций на световом конусе это значение в отдельной точке является существенным для построения фурье-образов. Иными словами, для полного определения T-произведения недостаточно определить его лишь для $x > y$ и $x < y$, надо задать еще и правила его интегрирования в окрестности нуля. В противном случае выражения типа $T(j_{\rho'}(x) j_{\rho}(y))$ остаются недоопределенными, что и проявляется в возникновении бессмысленных расходящихся выражений при больших импульсах.

Возникший при интегрировании T-произведения вблизи нуля произвол проще всего выразить, добавляя к его определению в координатном пространстве некоторое число производных от $\delta(x-y)$ с неопределенными коэффициентами (см., например, [16]), что добавит к правой части (4.39) некоторый полином от k^2:

$$g^c(k) = \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)}{z - k^2 - i\varepsilon}\, dz + P(k^2). \tag{4.39'}$$

Коэффициенты (может быть — расходящиеся) этого полинома как раз и призваны скомпенсировать расходимости в интеграле. Практически эта компенсация выполняется проще всего путем использования известной вычитательной процедуры.

Действительно, мы получили бы тогда:

$$\frac{1}{z' - k^2} = \frac{1}{z' - m^2 - (k^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{1}{z' - m^2}\left\{1 + \frac{k^2 - m^2}{z' - m^2} + \ldots + \left(\frac{k^2 - m^2}{z' - m^2}\right)^n\right\} + \frac{(k^2 - m^2)^{n+1}}{(z' - k^2)(z' - m^2)^{n+1}}$$

и потому

$$g^c(k) = i(k^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)\, dz}{(z - m^2)^{n+1}(z - k^2 - i\varepsilon)} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant l \leqslant n} (k^2 - m^2)^l \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)\, dz}{(z - m^2)^{l+1}} + P(k^2). \tag{4.40}$$

Выбирая здесь n достаточно большим, мы могли бы сделать первый интеграл в правой части (4.40) сходящимся; расходящиеся же члены в сумме, расположенной по степеням $k^2 - m^2$, можно было бы скомпенсировать за счет полинома $P(k^2)$, от которого остался бы тогда только конечный полином, как раз такой, что и в наших «сложных» спектральных представлениях типа (4.38).

Таким образом, в конце концов мы пришли бы и на этом пути к тем же соотношениям (4.38), вывод которых был бы, однако, менее убедительным из-за необходимости иметь «по дороге» дело с расходящимися выражениями. В нашем выводе с такой трудностью нам вовсе не приходится встречаться.

4.12. Покажем, как получается из наших спектральных представлений для вариационных производных матрицы рассеяния известный результат Лемана [19] — Челлена [20], относящийся к спектральному представлению обычной функции Грина.

Функцию Грина $G(x, y)$ определяют обычно как

$$G_{\rho\rho'}(x, y) = \delta_{\rho\rho'}\, G(x-y) = i\langle 0|\, T(\varphi_{\rho'}(x)\, S\varphi_{\rho}(y))\,|0\rangle. \tag{4.41}$$

Применяя для преобразования T-произведения в правой части теорему Вика, получаем

$$\delta_{\rho'\rho}\, G(x-y) = i\varphi_{\rho'}(x)\,\varphi_{\rho}(y)\,\langle 0|S|0\rangle + {}$$
$$+ i\sum_{\rho''\rho'''}\int dx'\, dy'\, \varphi_{\rho'}(x)\,\varphi_{\rho''}(x') \times$$
$$\times \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho''}(x')\,\delta\varphi_{\rho'''}(y')} \right| 0 \right\rangle \varphi_{\rho'''}(y')\,\varphi_{\rho}(y), \tag{4.42}$$

где

$$\varphi_{\rho'}(x)\,\varphi_{\rho}(y) = -i\delta_{\rho'\rho}\, D^c(x-y)$$

— обычное хронологическое спаривание для невзаимодействующих операторов и

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx} D^c(k)\, dk, \qquad D^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}.$$

Переходя в (4.42) к фурье-образам, находим:

$$G(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} + \frac{1}{(m^2 - k^2 - i\varepsilon)^2}\, g^c(k), \tag{4.43}$$

откуда на основании (4.38)

$$G(k) = (1 + C_1)(m^2 - k^2 - i\varepsilon)^{-1} + \sum_{2\leqslant i\leqslant n} c_i (m^2 - k^2)^{i-2} +$$
$$+ (m^2 - p^2)^{n+1}\int_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)\, dz}{(m^2 - z)^{n+1}(z - k^2 - i\varepsilon)}. \tag{4.44}$$

Представление Челлена — Лемана получится теперь, если мы сделаем еще дополнительное предположение о том, что «степень роста» n равна единице. Тогда действительно

$$G(k) = (1 + C_1)(m^2 + k^2 - i\varepsilon)^{-1} + \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z')\,dz'}{z' - k^2 - i\varepsilon};$$

$$J(z) = \frac{I(z)}{(z - m^2)^2}, \tag{4.45}$$

причем множитель $(1 + C_1)$ может быть исключен с помощью конечной перенормировки:

$$G(p) \to (1 + C_1)\,G(p). \tag{4.46}$$

§ 5. ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ ФЕРМИЕВСКИХ РАДИАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА [1])

5.1. В § 3 мы установили, что из всех радиационных операторов не выше второго порядка отличными от нуля вакуумными матричными элементами обладают лишь операторы типа (3.8) и (3.9). Первый из них рассматривался в предыдущем параграфе, сейчас мы займемся изучением вакуумных средних

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\psi(y)} S^+ \right| 0 \right\rangle = i\Theta^{(c)}(x-y). \tag{5.1}$$

При выполнении дифференцирований по фермиевским полям надо учитывать их антикоммутативность. Это приведет, в первую очередь, к тому, что левые и правые производные будут отличаться знаком, если дифференцируется четная в фермионных операторах величина. Для определенности мы будем работать всегда только с *левыми* производными. Далее, антикоммутативность полей приведет к антикоммутативности производных при многократном дифференцировании, например

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_1\delta\psi_2} = -\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_2\delta\psi_1}. \tag{5.2}$$

Изменится и формула для дифференцирования произведения. В случае использования левых производных она примет вид

$$\frac{\delta(AB)}{\delta\psi} = \frac{\delta A}{\delta\psi}B + (-1)^{\eta_A} A\frac{\delta B}{\delta\psi}, \tag{5.3}$$

где η_A — число входящих в A ферми-операторов. Наконец заметим, что при выполнении эрмитова сопряжения наши левые производные будут переходить в правые и для возвращения к стандартному порядку понадобится, если дифференцируется четное в ферми-операторах выражение, добавочная перемена знака.

5.2. Как и в бозевском случае, мы будем устанавливать связь (5.1) с вакуумным ожиданием от произведения токов. Поэтому полезно выяснить сначала правила сопряжения для двух введенных выше [(3.4)] токов $\frown(x)$ и $\overline{\frown}(x)$. В силу унитарности матрицы

---

[1]) См. примечание на стр. 44.

рассеяния выражение для $\frown(x)$ можно записать в двух видах:

$$\frown(x) = -i\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}S^{+} = iS\frac{\delta S^{+}}{\delta\bar{\psi}(x)}. \tag{5.4}$$

Выполняя дираковское сопряжение, находим:

$$\overline{\frown}(x) = \frown^{+}(x)\beta = iS\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right)^{+}\beta =$$

$$= -iS\left(\frac{S^{+}\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)\beta = -iS\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}\beta S^{+}.$$

Чтобы выяснить смысл $\overline{\frown}(x)$, рассмотрим локальную вариацию

$$\delta_x S = \delta\bar{\psi}(x)\left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) + \delta\psi(x)\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right).$$

Выполняя здесь эрмитово сопряжение, находим:

$$\delta_x S^{+} = \left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}(\delta\bar{\psi}^{+}(x)) + \left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right)^{+}\delta(\psi^{+}(x)) =$$

$$= \left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}\beta\,\delta\psi(x) + \left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}\delta\bar{\psi}(x)\beta =$$

$$= \delta\psi(x)\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}\beta S^{+} + \delta\bar{\psi}(x)\left(\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\right)^{+}\beta S^{+}.$$

Но, с другой стороны,

$$\delta_x S^{+} = \delta\bar{\psi}(x)\frac{\delta S^{+}}{\delta\bar{\psi}(x)} + \delta\psi(x)\frac{\delta S^{+}}{\delta\psi(x)}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^{+}\beta = \frac{\delta}{\delta\psi(x)}; \qquad \left(\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\right)^{+}\beta = \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}. \tag{5.5}$$

Тем самым для выражения, дираковски сопряженного к (5.4), получается

$$\overline{\frown}(x) = i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^{+} = -iS\frac{\delta S^{+}}{\delta\psi(x)}, \tag{5.6}$$

что оправдывает введенные ранее обозначения $\frown(x)$ и $\overline{\frown}(x)$.

5.3. Варьируя теперь выражение $\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\right)S^{+}$ по $\bar{\psi}(x)$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)}S^{+} = \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(y)}S^{+}\right) + \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\frac{\delta S^{+}}{\delta\bar{\psi}(x)}$$

и пользуясь определениями токов (5.4,6), находим, что

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\psi(y)}\,S^{+} = -i\,\frac{\delta\overline{\frown}(y)}{\delta\overline{\psi}(x)} - \overline{\frown}(y)\frown(x). \tag{5.7}$$

Так же точно получается

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\psi(y)}\,S^{+} = -\frac{\delta^2 S}{\delta\psi(y)\,\delta\overline{\psi}(x)}\,S^{+} = -i\,\frac{\delta\frown(x)}{\delta\psi(y)} + \frown(x)\overline{\frown}(y). \tag{5.8}$$

Из (5.7), (5.8) следует

$$\frown(x)\overline{\frown}(y) + \overline{\frown}(y)\frown(x) = i\left(\frac{\delta\frown(x)}{\delta\psi(y)} - \frac{\delta\overline{\frown}(y)}{\delta\overline{\psi}(x)}\right) \tag{5.9}$$

— аналог прежнего коммутационного соотношения (3.16), где только теперь коммутатор естественным образом заменился на антикоммутатор. С другой стороны, пользуясь условием причинности, получаем

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\psi}(x)\,\delta\psi(y)}\,S^{+} = \left\{\begin{array}{ll}\frown(x)\overline{\frown}(y) & x \gtrsim y\\ -\overline{\frown}(y)\frown(x) & x \lesssim y\end{array}\right\} = T(\frown(x)\overline{\frown}(y)). \tag{5.10}$$

В полной аналогии с бозевским случаем определим матричные элементы по вакууму:

$$\langle 0|\,T(\frown_\alpha(x)\overline{\frown_\beta}(y))\,|0\rangle = i\Theta^{(c)}_{\alpha\beta}(x, y), \tag{5.11}$$

$$\langle 0|\,\frown_\alpha(x)\overline{\frown_\beta}(y)\,|0\rangle = i\Theta^{(-)}_{\alpha\beta}(x, y), \tag{5.12}$$

$$\langle 0|\,\overline{\frown_\beta}(y)\frown_\alpha(x)\,|0\rangle = i\Theta^{(+)}_{\alpha\beta}(x, y), \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\frown_\alpha\overline{\frown_\beta}(y) + \overline{\frown_\beta}(y)\frown_\alpha(x)\,|0\rangle &= i\,\Theta_{\alpha\beta}(x, y) =\\ &= i(\Theta^{(-)}_{\alpha\beta}(x, y) + \Theta^{(+)}_{\alpha\beta}(x, y)),\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}-i\left\langle 0\left|\frac{\delta\overline{\frown_\beta}(y)}{\delta\overline{\psi_\alpha}(x)}\right|0\right\rangle &= \langle 0|\,\theta(x-y)\,[\frown_\alpha(x)\overline{\frown_\beta}(y)]_{+}|0\rangle =\\ &= i\Theta^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}(x, y),\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}-i\left\langle 0\left|\frac{\delta\frown_\alpha(x)}{\delta\psi_\beta(y)}\right|0\right\rangle &= -\langle 0|\,\theta(y-x)\,[\frown_\alpha(x)\overline{\frown_\beta}(y)]_{+}\,|0\rangle =\\ &= i\Theta^{\mathrm{adv}}_{\alpha\beta}(x, y).\end{aligned} \tag{5.16}$$

Нам понадобятся следующие, очевидные из этих определений, соотношения между матричными элементами радиационных операторов:

$$\left.\begin{aligned} \theta^{(c)}(x, y) &= \theta^{\text{ret}}(x, y) - \theta^{(+)}(x, y), \\ \theta^{(c)}(x, y) &= \theta^{\text{adv}}(x, y) + \theta^{(-)}(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

$$\overline{\theta^{(\text{ret})}}(-x) = +\,\theta^{\text{adv}}(x). \tag{5.18}$$

Запаздывающий и опережающий матричные элементы обладают, конечно, свойством:

$$\theta^{\text{ret}}(x, y) = 0 \text{ для } x \lesssim y; \quad \theta^{\text{adv}}(x, y) = 0 \text{ для } x \gtrsim y. \tag{5.19}$$

Ясно, что ввиду трансляционной и изотопической инвариантности все введенные функции $\theta^{(?)}$ должны иметь форму

$$\theta^{(?)}(x, y) = \delta_{s,t}\,\theta^{(?)}(x - y), \tag{5.20}$$

где s, t — изотопические (протон-нейтронные) индексы, а $\theta^{(?)}(x-y)$ — обычные спинорные матрицы. Далее, в силу инвариантности относительно преобразований Лоренца ясно, что $\theta^{(?)}(x-y)$ в свою очередь должны иметь структуру

$$\theta^{(?)}(x) = i\hat{\partial}\vartheta_1^{(?)}(x) + \vartheta_2^{(?)}(x), \tag{5.21}$$

где $\vartheta_1^{(?)}$ и $\vartheta_2^{(?)}$ — скалярные функции. Мы здесь ввели общепринятое обозначение $\hat{\partial} \equiv \gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} - \vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$. Также ниже $\hat{k} \equiv \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma}\vec{k}$. Подставляя получающееся из (5.20), (5.21) выражение для $\theta^{(?)}(x, y)$ через $\vartheta_1^{(?)}$, $\vartheta_2^{(?)}$ в (5.17), получим немедленно соотношения между скалярными функциями $\vartheta_1^{(?)}$ и $\vartheta_2^{(?)}$:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{1,2}^{(c)}(x) &= \vartheta_{1,2}^{\text{ret}}(x) - \vartheta_{1,2}^{(+)}(x), \\ \vartheta_{1,2}^{(c)}(x) &= \vartheta_{1,2}^{\text{adv}}(x) + \vartheta_{1,2}^{(-)}(x). \end{aligned}\right\} \tag{5.17'}$$

5.4. Рассмотрим теперь функцию $\theta^{(-)}(x)$. Используя, как всегда, условия полноты и трансляционной инвариантности, можем написать для нее:

$$\theta_{\alpha\beta}^{(-)}(x - y) = -i\sum_n \int d\mathbf{k}\,\langle 0|\,\cap_\alpha(0)\,|n, \mathbf{k}\rangle\langle n, \mathbf{k}|\,\overline{\cap}_\beta(0)\,|0\rangle\, e^{-ik(x-y)}. \tag{5.22}$$

В силу (3.6) вакуумный член с $n=0$ в сумме будет отсутствовать. Рассуждая так же, как в бозевском случае (после формулы (4.2)), убедимся, что в сумме будут отсутствовать и члены, соответствующие промежуточным состояниям с одним нуклоном или произвольным числом мезонов. Таким образом, сумма в (5.22) должна начинаться с члена с $n=2$, но притом не двумезонного, и минимальная масса промежуточного состояния получится, если в нем присутствует один нуклон и один мезон, т. е.

$$k^2 \geqslant (M+m)^2. \tag{5.23}$$

Записывая разложение (5.22) в виде четырехмерного интеграла Фурье и определяя фурье-образ $\Sigma^{(?)}(k)$ функции $\Theta^{(?)}(x)$ нашим стандартным образом, видим, что

$$\Sigma^{(-)}(k) = \\ = -(2\pi)^4 i \sum_n \langle 0 | \cap_\alpha(0) | n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} | \overline{\cap}_\beta(0) | 0\rangle \delta(k_0 - \sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}). \tag{5.24}$$

Ясно, что фурье-образ $\Sigma^{(?)}(k)$ будет обладать матричной структурой, совершенно аналогичной матричной структуре $\Theta^{(?)}(x)$:

$$\Sigma^{(?)}(k) = (\gamma k)\,\sigma_1^{(?)}(k) + \sigma_2^{(?)}(k), \tag{5.25}$$

где $\sigma_1^{(?)}$ и $\sigma_2^{(?)}$ — скалярные функции, причем как раз являющиеся фурье-образами скалярных функций $\vartheta_1^{(?)}$ и $\vartheta_2^{(?)}$.

Повторяя рассуждения § 4, убедимся без труда, что функции $\sigma_1^{(-)}$ и $\sigma_2^{(-)}$ выражаются в виде

$$\sigma_{1,2}^{(-)}(k) = -2\pi i \theta(k^0)\, \rho_{1,2}(k^2), \tag{5.26}$$

где зависящие только от k^2 спектральные функции $\rho_1(k^2)$ и $\rho_2(k^2)$ определены условием

$$\theta(k^0)\{(\gamma k)\rho_1(k^2) + \rho_2(k^2)\} = \\ = (2\pi)^3 \sum_n \langle 0 | \cap_\alpha(0) | n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} | \overline{\cap}_\beta(0) | 0\rangle\, \theta(k^0) \times \\ \times 2\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_n^2}\, \delta(k^2 - M_n^2). \tag{5.27}$$

5.5. Чтобы разделить в правой части члены, относящиеся к ρ_1 и к ρ_2, помножим (5.27) на γ^0, возьмем затем шпур и распишем дираковское сопряжение через эрмитово. Тогда

$$\theta(k^0) k^0 \rho_1(k^2) = \frac{(2\pi)^3}{2} \theta(k^0) k^0 \sum_{n,\alpha} |\langle 0 | \cap_\alpha(0) | n, \mathbf{k}\rangle|^2 \delta(k^2 - M_n^2). \tag{5.28}$$

На множитель $\theta(k^0)\,k^0$ это равенство можно сократить (ср. § 4), и мы получаем

$$\rho_1(k^2)=\frac{(2\pi)^3}{2}\sum_{n,\alpha}|\langle 0\,|\,\frown_\alpha(0)\,|\,n\mathbf{k}\rangle|^2\,\delta(k^2-M_n^2), \tag{5.29}$$

откуда видно, что

$$\left.\begin{aligned}&1.\ \rho_1(k^2)\geqslant 0,\\ &2.\ \rho_1(k^2)=0\quad\text{при}\quad k^2\leqslant(M+m)^2\quad(\text{из } (5.23)).\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Чтобы найти выражение для $\rho_2(k^2)$, возьмем шпур непосредственно от (5.27):

$$\theta(k^0)\,\rho_2(k^2)=$$
$$=\frac{\theta(k^0)\,k^0}{2}(2\pi)^3\sum_{n,\alpha,\beta}\langle 0\,|\,\frown_\alpha(0)\,|\,n,\mathbf{k}\rangle\,\langle n,\mathbf{k}\,|\,\frown^*_\beta(0)\,|\,0\rangle\,\gamma^0_{\beta\alpha}\,\delta(k^2-M_n^2).$$

Мы пользуемся обычным представлением матриц Дирака, где $\gamma^0=$ $=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Поэтому

$$\theta(k^0)\,\rho_2(k^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\,\theta(k^0)\,k^0\,(2\pi)^3\sum_{n;\ \alpha=1,\,2}|\langle 0\,|\,\frown_\alpha(0)\,|\,n,\mathbf{k}\rangle|^2\,\delta\left(k^2-M_n^2\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\,\theta(k^0)\,k^0\,(2\pi)^3\sum_{n;\ \alpha=3,\,4}|\langle 0\,|\,\frown_\alpha(0)\,|\,n,\mathbf{k}\rangle|^2\,\delta\left(k^2-M_n^2\right). \tag{5.31}$$

Складывая и вычитая (5.28) и (5.31), придем еще к двум неравенствам:

$$\theta(k^0)\,[k^0\rho_1(k^2)+\rho_2(k^2)\,]\geqslant 0;\qquad \theta(k^0)\,[k^0\rho_1(k^2)-\rho_2(k^2)\,]\geqslant 0.$$

Если заметить теперь, что

$$k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+M_n^2}=\sqrt{\mathbf{k}^2+k^2}\geqslant+\sqrt{k^2}=|\,k\,|,$$

то мы увидим, что необходимым и достаточным условием выполнения полученных неравенств (которые должны иметь место в любой системе отсчета) будет

$$|\,k\,|\,\rho_1(k^2)+\rho_2(k^2)\geqslant 0;\qquad |\,k\,|\,\rho_1(k^2)-\rho_2(k^2)\geqslant 0.$$

Таким образом, мы видим, что функция $\rho_2(k^2)$ должна удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned}&1.\ -|\,k\,|\,\rho_1(k^2)\leqslant\rho_2(k^2)\leqslant k\rho_1(k^2),\\ &2.\ \rho_2(k^2)=0\quad\text{при}\quad k^2<(M+m)^2\quad(\text{из } (5.23)).\end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Итак, мы пришли к спектральному представлению для функций $\sigma_1^{(-)}$ и $\sigma_2^{(-)}$:

$$\sigma_{1,2}^{(-)}(k) = -2\pi i \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \theta(k^0)\,\delta(k^2 - M^2)\,\rho_{1,2}(M^2)\,dM^2, \tag{5.33}$$

совершенно аналогичному спектральному представлению (4.9) для функции $g^{(-)}(k)$.

5.6. Чтобы перейти отсюда к построению спектральных представлений для других функций $\sigma^{(?)}(k)$, нам надо будет установить сначала еще несколько соотношений между функциями различных верхних индексов, вытекающих из инвариантности по отношению к зарядовому сопряжению. Условие такой инвариантности можно записать в виде

$$\langle 0 | \overline{\frown}_\beta(y) \frown_\alpha(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\frown}'_\beta(y) \frown'_\alpha(x) | 0 \rangle, \tag{5.34}$$

где зарядово-сопряженные операторы $\overline{\frown}'$, $\frown'$ связаны с $\overline{\frown}$, $\frown$ известными соотношениями

$$\frown'(x) = C\overline{\frown}(x) = \overline{\frown}(x)\,C^T;\quad \overline{\frown}'(x) - C^{-1}\frown(x) \tag{5.35}$$

и для матрицы C выполняются условия:

$$CC^+ = 1;\qquad C^T = -C;\qquad C^{-1}\gamma^k C = -(\gamma^k)^T. \tag{5.36}$$

Применяя условие (5.34) к произведению, стоящему в левой части (5.13) и используя (5.35) и (5.36), придем после несложных матричных преобразований к соотношению

$$\theta^{(+)}(x) = -(C^{-1}\theta^{(-)}(-x)\,C)^T, \tag{5.37}$$

устанавливающему связь между отрицательно- и положительно-частотными функциями. Совершенно аналогично, применяя условие зарядовой инвариантности типа (5.34) к другим радиационным операторам второго порядка, мы получим еще ряд соотношений, из которых выпишем лишь

$$\theta^{\mathrm{ret}}(x) = (C^{-1}\theta^{\mathrm{adv}}(-x)\,C)^T, \tag{5.38}$$

которое понадобится нам в дальнейшем.

Записывая с помощью (5.20), (5.21) $\theta^{(?)}(x, y)$ через $\vartheta_{1,2}^{(?)}(x-y)$, используя (5.36), чтобы избавиться от матрицы C, и разделяя после этого части, содержащие и не содержащие матрицы γ (что можно сделать путем взятия соответствующих шпуров), получим из (5.37) и (5.38) соответствующие «соотношения четности» для скалярных функций $\vartheta_{1,2}^{(?)}$:

$$\vartheta_{1,2}^{(+)}(x) = -\vartheta_{1,2}^{(-)}(-x);\qquad \vartheta_{1,2}^{\mathrm{adv}}(x) = \vartheta_{1,2}^{\mathrm{ret}}(-x).$$

Производя здесь переход к фурье-образам, имеем:

$$\sigma_{1,2}^{(+)}(k) = -\sigma_{1,2}^{(-)}(-k), \tag{5.39}$$

$$\sigma_{1,2}^{\text{adv}}(k) = \sigma_{1,2}^{\text{ret}}(-k). \tag{5.40}$$

5.7 Соотношение (5.39) дает нам возможность немедленно выписать спектральное представление для функций $\sigma_{1,2}^{(+)}(k)$:

$$\sigma_{1,2}^{(+)}(k) = 2\pi i\,\theta(-k^0)\,\rho_{1,2}(k^2) =$$
$$= 2\pi i \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \theta(-k^0)\,\delta(k^2 - M^2)\,\rho_{1,2}(M^2)\,dM^2. \tag{5.41}$$

Подставляя это спектральное представление, равно как и (5.26), в соотношения, получающиеся из (5.17′) переходом к фурье-образам, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1,2}^{(c)}(k) &= -2\pi i\,\theta(k^0)\,\rho_{1,2}(k^2) + \sigma_{1,2}^{\text{adv}}(k), \\ \sigma_{1,2}^{(c)}(k) &= -2\pi i\,\theta(-k^0)\,\rho_{1,2}(k^2) + \sigma_{1,2}^{\text{ret}}(k). \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

Таким образом, в частности, устанавливается, что, как и в бозевском случае, при малых импульсах $k^2 < (M+m)^2$ фурье-образы всех трех «гринообразных» функций совпадают:

$$\sigma^{(c)}(k) = \sigma^{\text{ret}}(k) = \sigma^{\text{adv}}(k) \quad \text{при} \quad k^2 < (M+m)^2. \tag{5.43}$$

5.8. Коль скоро установлены спектральные представления (5.26), (5.41), свойства спектральных функций (5.30.2) и (5.32.2), формулы (5.42) и соотношения (5.40), то дальнейшие рассуждения можно провести, дословно повторяя вывод предыдущего параграфа. Поэтому выпишем сразу «сложные» спектральные представления для гринообразных фуикций $\sigma_{1,2}^{(c)}$, $\sigma_{1,2}^{\text{ret}}$ и $\sigma_{1,2}^{\text{adv}}$:

$$\sigma_{1,2}^{(c)}(p) = -(p^2 - M^2)^{n+1} \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{\rho_{1,2}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - M)^{n+1}(\zeta - p^2 - i\varepsilon)} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{A}_j^{1,2}(p^2 - M^2)^j \tag{5.44}$$

и

$$\sigma_{1,2}^{\left(\substack{\text{ret}\\ \text{adv}}\right)}(p) = -(p^2 - M^2)^{n+1} \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{\rho_{1,2}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - M^2)^{n+1}(\zeta - p^2 \mp i\varepsilon p^0)} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{A}_j^{(1,2)}(p^2 - M^2)^j. \tag{5.45}$$

5.9. Удобно также иметь спектральные представления, записанные в несколько ином виде. Именно, введем вместо $\rho_{1,2}$ две неотрицательные в силу (5.30), (5.32) функции:

$$J_1(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) - \frac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2}; \qquad J_2(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) + \frac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2}, \tag{5.46}$$

где $\nu = +\sqrt{k^2} = |k|$. Тогда

$$(k\gamma)\rho_1(\nu^2) + \rho_2(\nu^2) = (k\gamma - \nu) J_1(\nu) + (k\gamma + \nu) J_2(\nu)$$

(здесь ν считается самостоятельной, не зависящей от k переменной), и если мы построим комбинации (5.25)

$$\Sigma^{(?)}(k) = (k\gamma)\sigma_1^{(?)}(k) + \sigma_2^{(?)}(k),$$

то получим для полной гринообразной функции $\Sigma^{(?)}(k)$ спектральное представление

$$\left.\begin{aligned}\Sigma^{(?)}(k) = -(k^2 - M^2)^{n+1} \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \frac{(\hat{k} - \nu) J_1(\nu) + (\hat{k} + \nu) J_2(\nu)}{(\nu^2 - M^2)^{n+1}(\nu^2 - k^2)} d\nu^2 + \\ + \left(\hat{k}\mathfrak{A}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_0^{(2)}\right) + \left(\hat{k}\mathfrak{A}_1^{(1)} + \mathfrak{A}_1^{(2)}\right)\left(k^2 - M^2\right) + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Желая установить спектральные представления для конкретных функций Σ^c, Σ^{ret} и Σ^{adv}, надо лишь выбрать здесь соответствующее правило обхода полюса $k^2 = M^2$.

Чтобы привести представление (5.47) к еще более наглядному виду, заметим, что разности

$$\frac{(k^2 - M^2)^{n+1}}{(\nu^2 - M^2)^{n+1}} \frac{1}{\nu - \hat{k}} - \frac{(\hat{k} - M)^{2n+2}}{(\nu - M)^{2n+2}} \frac{1}{\nu - \hat{k}}$$

и

$$\frac{(k^2 - M^2)^{n+1}}{(\nu^2 - M^2)^{n+1}} \frac{1}{\nu + \hat{k}} - \frac{(\hat{k} - M)^{2n+2}}{(\nu + M)^{2n+2}} \frac{1}{\nu + \hat{k}}$$

являются по отношению к $\hat{k}$ *полиномами* степени $2n + 1$. Поэтому, если образовать такие разности под интегралами в (5.47), то в каждом члене полинома множитель $\hat{k}$ в соответствующей степени просто выйдет из-под интеграла и интегрирование по ν приведет к некоторому числу—т. е. интегрирование такой разности приведет просто к полиному степени $2n + 1$ от $\hat{k}$.

Это дает нам возможность преобразовать (5.47) к виду

$$\Sigma(k) = -(\hat{k}-M)^{2n+2} \int \left\{ -\frac{I_1(\nu)}{\nu+\hat{k}} + \frac{I_2(\nu)}{\nu-\hat{k}} \right\} d\nu + \\ + B_0 + B_1(\hat{k}-M) + \ldots + B_{2n+1}(\hat{k}-M)^{2n+1}, \tag{5.48}$$

где введены новые спектральные функции

$$I_1(\nu) = \frac{2J_1(\nu)\,\nu}{(\nu+M)^{2n+2}} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad J_2(\nu) = \frac{2J_2(\nu)\,\nu}{(\nu-M)^{2n+2}} \geqslant 0. \tag{5.49}$$

Как и в бозевском случае, можно показать, что

$$B_0 = 0;$$

для этого стоит лишь рассмотреть матричный элемент от S между двумя однонуклонными состояниями, точно так же, как в § 4 мы рассматривали матричный элемент от S между двумя одномезонными состояниями. Наконец, соотношение (5.18) приводит к тому следствию, что

$$\text{все } B_m \text{ вещественны.} \tag{5.50}$$

Представление Челлена — Лемана для фермионной функции Грина можно было бы получить опять с помощью соображений, совершенно аналогичных использованным в предыдущем параграфе, при дополнительном предположении, что степень роста $n = 0$. Мы опять столкнулись здесь с тем интересным фактом, что при нашей системе условий (§ 2) мы должны вместо формы лагранжиана задавать «степень роста» спектральной функции.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

6.1. Вернемся теперь к вопросу построения строгого вывода дисперсионных соотношений.

Заметим, что математически корректное рассмотрение «ненаблюдаемой» области потребует довольно громоздких рассуждений, выполняемых с необычной для физика педантичностью. Напомним в этой связи, что неудача предыдущих «более простых» попыток [11]—[15] построить доказательство дисперсионных соотношений была связана именно с употреблением аргументации, которая оказывалась необоснованной или неправильной при рассмотрении ненаблюдаемой области. Относительная простота доказательства для рассеяния вперед [22], [23] связана с простым строением ненаблюдаемой области в этом случае.

Мы выведем дисперсионные соотношения для конкретной задачи о рассеянии π-мезонов на нуклонах. Для операторов нуклонного и мезонного полей будут использованы обозначения §§ 2 и 3; импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ будут обозначать теперь импульсы нуклона, соответственно до и после соударения, индексы S и S' — совокупность спинового и изотопического квантовых чисел нуклонов. Импульсы и изотопические состояния мезонов до и после соударения будут обозначаться через $\mathbf{q}$, ρ и $\mathbf{q}'$, ρ'. Мы также по-прежнему будем пользоваться обозначениями $\alpha = (p, S, \rho)$ и $\omega = (p', S', \rho')$.

В дальнейшем будем все время считать, что $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$, случай же их равенства (рассеяние вперед) будем рассматривать как предел $\mathbf{q}' \to \mathbf{q}$ при $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$; таким образом, когда мы будем говорить о матричных элементах S-матрицы, фактически у нас всегда будут фигурировать матричные элементы матрицы iT (ср. § 1, перед формулой (1.17)). Тогда, если использовать обычную в теории рассеяния нормировку, матричный элемент перехода запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}') &= \langle \mathbf{p}', S', \mathbf{q}', \rho' \,|\, S \,|\, \mathbf{p}, S, \mathbf{q}, \rho \rangle = \\ &= \langle \mathbf{p}', S' \,|\, a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}')\, S\, a_{\rho}^{(+)}(\mathbf{q}) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle, \\ p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \ \ldots, \ &\quad q^0 = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

где мы воспользовались (2.10). С помощью допущения II. (3) из § 2 мы можем, проводя преобразование типа (2.20)—(2.22), привести этот матричный элемент к форме

$$\left.\begin{aligned} &S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\, dy\, \frac{e^{i(q'x - qy)}}{2\sqrt{q^{0\prime} q^0}} \left\langle \mathbf{p}', S' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_{\rho}(y)}\, S^+ \right| \mathbf{p}, S \right\rangle, \\ &p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \ \ldots, \quad q^0 = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \end{aligned}\right\} \quad (6.2)$$

которая послужит основой для наших дальнейших рассуждений.

6.2. Для исследования элемента перехода (6.2) вернемся к рассмотрению введенных в § 3 функций $F_{\alpha\omega}^{(?)}(x)$. Введем, совершенно так же как и в § 4 (формула (4.1)), фурье-образы этих функций:

$$F_{\alpha\omega}^{(?)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\, e^{-ikx}\, T_{\alpha\omega}^{(?)}(k). \quad (6.3)$$

Подставляя теперь в (6.2) выражение (3.20) для матричного элемента причинного радиационного оператора и выполняя интегрирование по x и y, получим выражение для $S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}')$ через только что введенный фурье-образ $T_{\alpha\omega}^{(c)}(k)$:

$$\left.\begin{aligned} S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}') &= \frac{2\pi i}{\sqrt{4 q^0 q'^0}}\, \delta(q + p - q' - p')\, T_{\alpha\omega}^{(c)}\left(\frac{q + q'}{2}\right), \\ p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \ \ldots, &\quad q^0 = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}. \end{aligned}\right\} \quad (6.4)$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать не непосредственно с $S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}')$, а с вспомогательной величиной —

«запаздывающим» матричным элементом

$$H(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}') =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\, dy \frac{e^{i(q'x - qy)}}{\sqrt{4q'^0 q^0}} \left\langle \mathbf{p}', S' \left| -i \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta \varphi_{\rho'}(x)} \right| \mathbf{p}, S \right\rangle =$$
$$= \frac{2\pi i}{\sqrt{4q'^0 q^0}} \delta(q + p - q' - p')\, T^{\rm ret}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right). \quad (6.5)$$

Заметим теперь, что в силу (3.33.2)

$$T^{(c)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) - T^{\rm ret}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = P_{\rho\rho'} T^{(-)}_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right) =$$
$$= \int e^{-i\frac{q+q'}{2}x} P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(x)\, dx.$$

Подставляя сюда для $F^{(-)}_{\alpha\omega}(x)$ выражение (3.30) через сумму по полной системе функций и выполняя интегрирования по x и по k, получим:

$$T^{(c)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) - T^{\rm ret}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) =$$
$$= (2\pi)^4 i \sum_n \delta\left(\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_n^2} - \frac{q^0 + q'^0}{2} - \frac{p^0 + p'^0}{2}\right) \times$$
$$\times \langle \mathbf{p}', S' | j_\rho(0) | \mathbf{k}, n\rangle \langle \mathbf{k}, n | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}, S\rangle \Big|_{\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}}. \quad (6.6)$$

Поэтому, если образовать разность $S - H$, в которой импульсы и энергии будут связаны законом сохранения $q + p - q' - p' = 0$, то аргумент δ-функции в (6.6) окажется равным

$$\sqrt{M_n^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{q}')^2} + q'^0 - p^0$$

или, если учесть выражения q'^0 и p^0 через трехмерные импульсы,

$$\sqrt{M_n^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{q}')^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{q}'^2} - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Легко видеть, что если бы последнее выражение могло обратиться в нуль при каких-либо *вещественных* значениях импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}'$, то это означало бы, что для такой комбинации импульсов нуклон с массой M мог бы распасться на мезон с массой m и систему в состоянии n с массой M_n. Ясно, что последнее могло бы случиться только при $M_n \leqslant M - m$. Ниже мы допустим, что у системы нуклон + мезон *нет* связанных состояний с массой, *меньшей суммы масс* мезона и нуклона, т. е. что

$$M_n \geqslant M + m.$$

Таким образом, интересующая нас δ-функция не может обращаться в нуль и, следовательно, разность $S - H$ тождественно равна нулю.

Итак, для *реальных* частиц,—у которых импульсы вещественны, и *энергии, связанные с импульсами* обычным релятивистским соотношением, *положительны,* — *и если выполняется закон сохранения* 4-импульса, имеет место равенство

$$T^{(c)}_{\alpha\omega}(k) = T^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(k), \tag{6.7}$$

т. е. причинный матричный элемент $S(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}')$ можно заменить запаздывающим $H(\alpha, \mathbf{q}; \omega, \mathbf{q}')$. Подчеркнем, что для возможности такой замены *все* сформулированные выше условия существенны; так, ниже, при рассмотрении поведения запаздывающего матричного элемента в ненаблюдаемой области отнюдь нельзя будет полагать выражение (6.6) равным нулю.

Ниже мы все время будем работать с запаздывающим матричным элементом (6.5), следовательно, с фурье-образом $T^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(k)$. Установим весьма важные свойства симметрии его эрмитовой и антиэрмитовой частей. Записывая

$$T^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(k) = D_{\alpha\omega}(k) + iA_{\alpha\omega}(k); \quad D^{*}_{\omega\alpha}(k) = D_{\alpha\omega}(k);$$
$$A^{*}_{\omega\alpha}(k) = A_{\alpha\omega}(k), \tag{6.8}$$

и сравнивая с (3.42), видим, что

$$D_{\alpha\omega}(k) = \overline{T}_{\alpha\omega}(k); \quad A_{\alpha\omega}(k) = \frac{1}{2i} T_{\alpha\omega}(k). \tag{6.9}$$

Поэтому, если перейти к фурье-образам в соотношениях симметрии (3.43) — (3.46) для функций $\overline{F}_{\alpha\omega}(x)$ и $F_{\alpha\omega}(x)$, то немедленно установим свойства симметрии эрмитовой и антиэрмитовой частей фурье-образа $T^{\text{ret}}_{\alpha\omega}(k)$:

$$(1 + P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = (1 + P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.10.1}$$

$$(1 - P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = -(1 + P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.10.2}$$

$$(1 + P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = -(1 + P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.10.3}$$

$$(1 - P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = (1 - P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right). \tag{6.10.4}$$

6.3. Для дальнейшего построения нам будет удобнее детализировать систему координат. Это ограничение не будет, конечно, принципиальным, — можно было бы продолжать рассуждения и в произвольной системе, действуя с соответствующими инвариантными величинами [24], [25], — однако специальная система координат упростит выкладки. Именно, воспользуемся общепринятой теперь системой, в которой сумма импульсов нуклона до и после рассеяния равна нулю:

$$\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0. \tag{6.11}$$

Эта система переходит в лабораторную при рассмотрении рассеяния вперед.

В силу (6.11) в избранной нами системе будет $\mathbf{p}^2=\mathbf{p}'^2$ и, благодаря закону сохранения энергии [1]), также и $\mathbf{q}^2=\mathbf{q}'^2$. Далее, используя закон сохранения импульса, найдем, что

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}{2} \quad \text{и} \quad (\mathbf{q}+\mathbf{q}')\,\mathbf{p}=0.$$

Поэтому можно положить

$$\frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}{2}=\lambda\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}$ — нормальный к $\mathbf{p}$ орт, $\mathbf{e}^2=1$, $\mathbf{ep}=0$, а λ — некоторый скаляр. Таким образом, мы можем выразить в нашей системе все четыре вектора $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ через один вектор $\mathbf{p}$ и один скаляр λ (орт $\mathbf{e}$ при заданном $\mathbf{p}$ можно считать фиксированным):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}&=\mathbf{p},\\ \mathbf{p}'&=-\mathbf{p},\\ \mathbf{q}&=-\mathbf{p}+\lambda\mathbf{e},\\ \mathbf{q}'&=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{e}, \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}{2}=\lambda\mathbf{e}. \tag{6.12}$$

Через те же величины выразятся и четвертые составляющие импульсов:

$$\begin{gathered} p^0=p'^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2},\\ q^0=q'^0=\frac{q^0+q'^0}{2}=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2+\lambda^2}=E. \end{gathered} \tag{6.13}$$

---

[1]) Здесь и ниже четыре 4-вектора импульса связаны законом сохранения $p+q-p'-q'=0$.

Вместо λ можно использовать в качестве независимой переменной также и энергию E мезона; выражение λ через E будет содержать иррациональность

$$\lambda = \sqrt{E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2}. \qquad (6.14)$$

В выбранной системе координат обращение формул (6.3) даст нам для фурье-образов функций $F^{(?)}_{\alpha\omega}(x)$:

$$T^{(?)}_{\alpha\omega}(E,\ \mathbf{e}) = T^{(?)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \int e^{i(Ex^0 - \lambda\mathbf{e}x)} F^{(?)}_{\alpha\omega}(x)\,dx. \qquad (6.15)$$

Эти фурье-образы можно будет рассматривать теперь, как функции E и $\mathbf{e}$, причем зависимость от E возникнет как явно, так и неявно, через функцию $\lambda(E)$ [см. (6.14)]. Чтобы избавиться от содержащейся в (6.14) иррациональности, мы введем операции симметризации по $\mathbf{e}$ и антисимметризации по $\mathbf{e}$ с последующим делением на λ, положив для любой $f(\mathbf{e},\ \lambda)$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathbf{e}} f(\mathbf{e},\ \lambda) &= f(\mathbf{e},\ \lambda) + f(-\mathbf{e},\ \lambda), \\ \mathfrak{A}_{\mathbf{e}} f(\mathbf{e},\ \lambda) &= \frac{1}{\lambda}\{f(\mathbf{e},\ \lambda) - f(-\mathbf{e},\ \lambda)\}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

и будем рассматривать далее не сами функции $T^{(?)}_{\alpha\omega}(E,\ \mathbf{e})$, но только их симметризованные или антисимметризованные комбинации $ST^{(?)}_{\alpha\omega}(E,\ \mathbf{e})$, $S = \mathfrak{S}_{\mathbf{e}}$ или $\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}$.

Поскольку λ и $\mathbf{e}$ входят в (6.15) только в виде произведения, то ясно, что применяя к $T^{(?)}$ операции S, мы придем к функциям, зависящим только от λ^2, т. е. не содержащим более в своей полной зависимости от E квадратного корня.

6.4. Заметим теперь, что переменной E в (6.15) по существу нельзя придавать произвольные вещественные значения. Действительно, если мы выберем

$$|E| < \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \qquad (6.17)$$

то λ станет мнимым, а следовательно, пространственные составляющие векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ — комплексными, тригонометрические функции в (6.15) перейдут в гиперболические и интегрирование по пространственным составляющим $\mathbf{x}$ потеряет смысл из-за экспоненциального возрастания на бесконечности. Эта область значений энергии E называется *ненаблюдаемой областью.*

Просто отказаться от рассмотрения энергий из ненаблюдаемой области нельзя, поскольку в правой части дисперсионных соотношений (ср. (1.6), (1.10)) под интегралом участвуют *все* значения энергии. Эта трудность неизбежно оказывается «камнем преткновения» всякой попытки вывести дисперсионные соотношения без глубокого исследования аналитического поведения функций $T^{(?)}_{\alpha\omega}$.

Поэтому для рассмотрения ненаблюдаемой области нам придется прибегнуть к обходному маневру: мы сначала рассмотрим функции $T^{(?)}_{\alpha\omega}(E)$ в наблюдаемой области, где мы имеем право пользоваться определением через интеграл (6.15), затем мы установим их аналитические свойства и покажем, что их можно будет аналитически продолжить и в ненаблюдаемую область, в которой сами интегралы (6.15) уже теряют смысл.

6.5. Для целей такого аналитического продолжения нам будет удобно рассматривать сначала интегралы (6.15) не как функции одной переменной E [1]), а как функции двух независимых переменных E и τ, где

$$\tau = E^2 - \mathbf{p}^2 - \lambda^2; \qquad \lambda^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau. \tag{6.18}$$

Такой подход эквивалентен, конечно, тому, что мы пока хотим рассматривать временные и пространственные составляющие векторов q и q', как независимые, с тем, чтобы лишь в дальнейшем наложить на них условия $q^2 = q'^2 = m^2$. Чтобы перейти к реальному случаю, нам надо будет положить

$$\tau = m^2. \tag{6.19}$$

В переменных E и τ интересующие нас функции $T^{(?)}$ будут определяться интегралами

$$T^{\mathrm{ret}}(E, \tau) = \int e^{i\left(Ex^0 - \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}\,\mathbf{ex}\right)} F^{\mathrm{ret}}(x)\,dx, \tag{6.20.1}$$

$$T^{\mathrm{adv}}(E, \tau) = \int e^{i\left(Ex^0 - \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}\,\mathbf{ex}\right)} F^{\mathrm{adv}}(x)\,dx, \tag{6.20.2}$$

---

[1]) Мы будем теперь интересоваться зависимостью функций $T^{(?)}_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e})$ только от переменной E, считая вектор $\mathbf{e}$, равно как

и

$$T(E, \tau) = T^{\mathrm{ret}}(E, \tau) - T^{\mathrm{adv}}(E, \tau) =$$
$$= \int e^{i\,(Ex - \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}\ \mathbf{ex})} F(x)\, dx, \qquad (6.20.3)$$

причем пока они определены (как обобщенные функции E и τ) только для вещественных E и τ. Однако рассуждение, совершенно аналогичное проведенному в § **4.4**, показывает, что в силу условия причинности (3.13), (3.14), благодаря которому

$$F^{\mathrm{ret}}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x < 0.$$
$$F^{\mathrm{adv}}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x > 0,$$

функции T^{ret} и T^{adv} можно расширить и на комплексные значения переменных E, τ. Именно, функция

$$ST^{\mathrm{ret}}(E, \tau)$$

будет аналитической функцией E и λ, регулярной в области

$$\mathrm{Im}\, E > |\mathrm{Im}\, \lambda|$$

и тем самым аналитической функцией переменных E, τ, регулярной в области

$$\mathrm{Im}\, E > \left| \mathrm{Im} \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau} \right|. \qquad (6.21)$$

Опережающая же функция

$$ST^{\mathrm{adv}}(E, \tau)$$

будет аналитической функцией E, τ, регулярной в области

$$\mathrm{Im}\, E < -\left| \mathrm{Im} \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau} \right|. \qquad (6.22)$$

6.6. Мы хотим получить дисперсионные соотношения, повторяя для наших функций (6.20) рассуждения, которые привели нас в § 4 к спектральным представлениям вакуумных средних радиационных операторов второго порядка.

и переменные, входящие в индексы α и ω, фиксированными. Поэтому мы, когда то не приведет к недоразумению, вовсе не будем их выписывать.

Осложнение будет состоять теперь в том, что функции (6.20) являются функциями двух переменных (подчеркнем еще раз, что вторую переменную τ мы ввели, чтобы можно было обойти ненаблюдаемую область (6.17)), аналитичными в некоторых сложных областях (6.21) или (6.22). Чтобы свести дело к случаю одной переменной, мы попробуем временно фиксировать значение τ и притом таким образом, чтобы границы областей аналитичности (6.21), (6.22) функций (6.20.1,2) перестали бы зависеть от τ.

Для этого мы выберем τ вещественным и удовлетворяющим неравенству

$$-V < \tau < -\mathbf{p}^2, \tag{6.23}$$

где V — произвольное, но фиксированное положительное число. Легко видеть, что для таких τ неравенство

$$\operatorname{Im} \left| \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau} \right| < \left| \operatorname{Im} E \right| \tag{6.23'}$$

будет выполняться для любых E с $\operatorname{Im} E \neq 0$.

В самом деле, записывая $E^2 = u + iv$, находим, что

$$(\operatorname{Im} E)^2 = \frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2},$$

откуда видно, что $(\operatorname{Im} E)^2$ есть монотонно убывающая функция вещественной части E^2. При выполнении же неравенства (6.23) вещественная часть подкоренного выражения в левой части (6.23′) может быть только больше, чем в правой.

Следовательно, при выполнении (6.23) функции ST^{ret} и ST^{adv} будут аналитическими функциями E в областях (6.24.1)

$$\operatorname{Im} E > 0 \tag{6.24.1}$$

и

$$\operatorname{Im} E < 0 \tag{6.24.2}$$

соответственно. Чтобы выяснить, можно ли считать эти функции одной аналитической функцией, регулярной для всех $\operatorname{Im} E \neq 0$, надо исследовать поведение разности

$$ST(E) = ST^{\text{ret}}(E) - ST^{\text{adv}}(E)$$

для вещественных E. Подчеркнем, что благодаря ограничению (6.23) ненаблюдаемой области теперь не будет, и интеграл (6.20.3) будет определять эту разность (конечно, вообще говоря, как обобщенную функцию) для всех вещественных E.

6.7. Займемся исследованием интеграла (6.20.3). Представляя с помощью (3.34) T как сумму положительно и отрицательно частотных функций и используя для последних выражение (3.30) через сумму по полной системе состояний, получим для $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$:

$$i\sum_n \int dx\, e^{i(Ex^0-\lambda e x)} \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{p}', S' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{k}, n\rangle \langle \mathbf{k}, n | j_\rho(0) | \mathbf{p}, S\rangle \times$$
$$\times e^{\left\{-i\left(k^0-\frac{p^0+p'^0}{2}\right)x^0+i\left(\mathbf{k}-\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}\right)\mathbf{x}\right\}} -$$
$$-i\sum_n P_{\rho\rho'} \int dx\, e^{i(Ex^0-\lambda e x)} \int d\mathbf{k} \langle \mathbf{p}', S' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{k}, n\rangle \times$$
$$\times \langle \mathbf{k}, n | j_\rho(0) | \mathbf{p}, S\rangle \times e^{\left\{i\left(k^0-\frac{p^0+p'^0}{2}\right)x^0-i\left(\mathbf{k}-\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}\right)\mathbf{x}\right\}},$$
$$k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+M_n^2}\,.$$

Интегрируя здесь сначала по x, а затем по $\mathbf{k}$, и переходя к нашей конкретной системе координат, найдем, что

$$T_{\alpha\omega}(E, \lambda e) = (2\pi)^4 i \sum_n \langle -\mathbf{p}, S' | j_{\rho'}(0) | \lambda e, n\rangle \langle \lambda e, n | j(0) | \mathbf{p}, S\rangle \times$$
$$\times \delta\left(E-\sqrt{\lambda^2+M_n^2}+\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}\right) -$$
$$-(2\pi)^4 i \sum_n \langle -\mathbf{p}, S' | j_\rho(0) | -\lambda e, n\rangle \langle -\lambda e, n | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}, S\rangle \times$$
$$\times \delta\left(E+\sqrt{\lambda^2+M_n^2}-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}\right). \quad (6.25)$$

Здесь в суммах по n в каждом состоянии должен быть, в силу сохранения ядерного заряда, минимум один нуклон. Поэтому низшими по энергии членами в этих суммах будут как раз состояния только с одним нуклоном. Поскольку вклады от таких членов можно будет явно вычислить, мы выделим из полной суммы (6.25) суммирование по однонуклонным состояниям (которые, кроме импульса, будут полностью характеризоваться спинороизотопическим индексом S''), а сумму по всем остальным состояниям обозначим через $f_{\alpha\omega}(E, \lambda\mathbf{e})$:

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\omega}(E, \lambda\mathbf{e}) &= f_{\alpha\omega}(E, \lambda\mathbf{e}) + \\
&+ (2\pi)^4 i \sum_{S''} \langle -\mathbf{p}, S' \,|\, j_{\rho'}(0) \,|\, \lambda\mathbf{e}, S'' \rangle \langle \lambda\mathbf{e}, S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle \times \\
&\quad \times \delta\left(E - \sqrt{\lambda^2 + M^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) - \\
&- (2\pi)^4 i \sum_{S''} \langle -\mathbf{p}, S' \,|\, j_\rho(0) \,|\, -\lambda\mathbf{e}, S'' \rangle \langle -\lambda\mathbf{e}, S'' \,|\, j_{\rho'}(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle \times \\
&\quad \times \delta\left(E + \sqrt{\lambda^2 + M^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right).
\end{aligned}
$$

В выписанных здесь суммах энергия E входит под аргументом δ-функции дважды — прямо и через λ^2. Преобразуя аргументы δ-функций к линейным функциям E, найдем

$$
\delta\left(E \mp \sqrt{\lambda^2 + M^2} \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) = \left| 1 - \frac{E_\mathbf{p}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \right| \delta(E \pm E_\mathbf{p}(\tau)),
$$

где

$$
E_\mathbf{p}(\tau) = \frac{2\mathbf{p}^2 + \tau}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}. \tag{6.26}
$$

Итак, мы получили, что

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\omega}(E, \tau) &= f_{\alpha\omega}(E, \tau) + \\
&+ (2\pi)^4 i \left| 1 - \frac{E_\mathbf{p}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \right| \delta(E + E_\mathbf{p}(\tau)) \times \\
&\times \sum_{S''} \langle -\mathbf{p}, S' \,|\, j_{\rho'}(0) \,|\, \lambda\mathbf{e}, S'' \rangle \langle \lambda\mathbf{e}, S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle - \\
&- (2\pi)^4 i \left| 1 - \frac{E_\mathbf{p}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \right| \delta(E - E_\mathbf{p}(\tau)) \times \\
\times \sum_{S''} \langle -\mathbf{p}, S' \,|\, j_\rho(0) \,|\, -\lambda\mathbf{e}, S'' \rangle &\langle -\lambda\mathbf{e}, S'' \,|\, j_{\rho'}(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle.
\end{aligned} \tag{6.27}
$$

Знак абсолютной величины у выделившихся из δ-функций множителей можно было бы здесь и опустить, поскольку для интересующих нас значений $\mathbf{p}^2$ и τ эти множители всегда будут положительными.

Совершенно аналогично преобразуются и δ-функции в суммах, входящих в $f_{\alpha\omega}(E,\tau)$. Поэтому мы можем записать:

$$f_{\alpha\omega}(E,\tau)=(2\pi)^4 i\sum_{n>1}\left|1-\frac{E_{\mathbf{p}n}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\right|\delta(E+E_{\mathbf{p}n}(\tau))\times$$
$$\times\langle-\mathbf{p},S'|j_{\rho'}(0)|\lambda\mathbf{e},n\rangle\langle\lambda\mathbf{e},n|j_\rho(0)|\mathbf{p},S\rangle-$$
$$-(2\pi)^4 i\sum_{n>1}\left|1-\frac{E_{\mathbf{p}n}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\right|\delta(E-E_{\mathbf{p}n}(\tau))\times$$
$$\times\langle-\mathbf{p},S'|j_\rho(0)|-\lambda\mathbf{e},n\rangle\langle-\lambda\mathbf{e},n|j_{\rho'}(0)|\mathbf{p},S\rangle,\qquad(6.28)$$

где теперь

$$E_{\mathbf{p}n}(\tau)=\frac{2\mathbf{p}^2+\tau-M_n^2+M^2}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}.\qquad(6.29)$$

Исследуем теперь «спектр» $T(E)$ более подробно. Прежде всего, мы предположим, что *у системы нуклон + π-мезон нет связанных состояний с массой, меньшей суммы масс нуклона и мезона* (кроме самого нуклона), т. е. что

$$M_n\geqslant M+m.\qquad(6.30)$$

Такое предположение по-видимому обосновано с точки зрения имеющегося сейчас опытного материала. Заметим, что именно в этом пункте очень важно, что мы рассматриваем только сильное ядерное взаимодействие и пренебрегаем не только слабым, но и *электромагнитным взаимодействием*. Действительно, в противном случае всегда существовали бы состояния типа нуклон + некоторое количество фотонов или типа π-мезоатома; непрерывный спектр масс таких состояний начинался бы непосредственно от M.

Если принять предположение (6.30), то энергии $E_{\mathbf{p}n}(\tau)$ будут удовлетворять неравенству

$$E_{\mathbf{p}n}(\tau)\leqslant-\frac{2Mm-2\mathbf{p}^2+m^2-\tau}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}=-E_c(\tau).\qquad(6.31)$$

Итак, спектр $f_{\alpha\omega}(E,\tau)$ будет иметь следующий вид: от $E=-\infty$ до $E=-E_c(\tau)$ будет иметься непрерывный спектр [1]),

---

[1]) $M_n=M+m$ есть *точная* граница непрерывного спектра, поскольку именно с этого значения начинаются массы состояний, включающих *две* частицы — один нуклон и один мезон.

обусловленный второй суммой в (6.28), затем от $E=-E_c(\tau)$ до $E=+E_c(\tau)$ расположится разрыв, в котором нет уровней, а от $E=+E_c(\tau)$ до $E=+\infty$ будет опять иметься непрерывный спектр.

Спектр функции $T(E, \tau)$ будет отличаться от спектра $f(E, \tau)$ добавлением двух дискретных уровней с $E=\pm E_{\mathbf{p}}(\tau)$ [(6.26)]. Детальное представление о характере спектра $T(E, \tau)$ важно и для доказательства существования дисперсионных соотношений и для непосредственного практического их приложения. Поэтому выпишем здесь критерий того, что изолированные полюса не попадут в область непрерывного спектра, и важный критерий того, что две области непрерывного спектра $T(E, \tau)$ не перекрываются[1]).

Сравнивая (6.26) и (6. 29), видим, что дискретный уровень из первой суммы (6.27) никогда не сможет попасть в область непрерывного спектра первой суммы (6.28); так же обстоит дело и для вторых сумм. В качестве же условия того, что дискретный уровень из первой суммы (6.27) не попадет в область непрерывного спектра второй суммы (6.28) (или, наоборот, дискретный уровень из второй суммы в непрерывный спектр первой), мы получим

$$\mathbf{p}^2 < \frac{Mm}{2}+\frac{m^2}{4}-\frac{\tau}{2}. \tag{6.32}$$

Для рассматриваемых пока значений τ, ограниченных неравенством (6.23), достаточным условием будет

$$\mathbf{p}^2 < \frac{1}{2}\left(2\frac{M}{m}+1\right)m^2 \quad \text{для} \quad \tau < -\mathbf{p}^2, \tag{6.32'}$$

а для реального $\tau=m^2$ условие (6.32) приведет к

$$\mathbf{p}^2 < \left(\frac{M}{2m}-\frac{1}{4}\right)m^2 \quad \text{для} \quad \tau=m^2. \tag{6.32''}$$

Таким образом, дискретные уровни не попадут в область непрерывного спектра только для достаточно малых $\mathbf{p}^2$, удовлетворяющих одному из неравенств (6.32), т. е. для рассеяния на достаточно малые углы.

---

[1]) Выполнение последнего критерия необходимо для применимости дальнейших рассуждений.

К такого же рода, — но менее жесткому, — условию приходим мы, требуя, чтобы не смыкались две области непрерывного спектра. Именно, для произвольного τ мы получаем

$$\mathbf{p}^2 < Mm + \frac{m^2}{2} - \frac{\tau}{2}. \tag{6.33}$$

Поэтому для $\tau < -\mathbf{p}^2$ достаточно потребовать, чтобы

$$\mathbf{p}^2 < \left(2\frac{M}{m} + 1\right) m^2 \quad \text{для} \quad \tau < -\mathbf{p}^2, \tag{6.33'}$$

а для $\tau = m^2$ условие (6.33) сведется к

$$\mathbf{p}^2 < Mm = \left(\frac{M}{m}\right) m^2 \quad \text{для} \quad \tau = m^2. \tag{6.33''}$$

Наконец, сравнивая границу непрерывного спектра (6.31) с границей (6.17) ненаблюдаемой области, видим, что непрерывный спектр не попадает в ненаблюдаемую область только

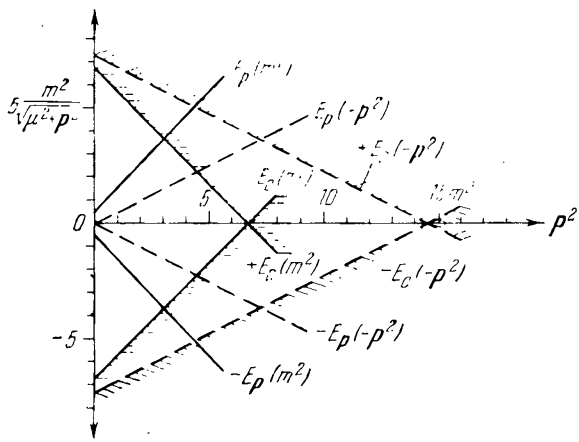


Рис. 1.

для $\mathbf{p}^2 = 0$, что соответствует рассеянию вперед. В других случаях хотя бы часть ненаблюдаемой области оказывается занятой непрерывным спектром. Таким образом, в случае рассеяния не вперед мы имеем вклад от непрерывного спектра в ненаблюдаемой области, который мы не умеем точно учитывать. Зависимость от $\mathbf{p}^2$ для границы непрерывного спектра и положения дискретных уровней изображена на рис. 1.

Вернемся теперь к вопросу о вкладе от дискретного однонуклонного уровня. Вычисление сумм в (6.27), — которое мы, чтобы не прерывать изложения, отнесем в дополнение Б, — показывает, что эти суммы можно представить в виде

$$-(2\pi)^3\left|1-\frac{E_{\mathbf{p}}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\right|\sum_{S''}\langle-\mathbf{p},\ S'\,|\,j_{\rho'}(0)\,|\,\lambda\mathbf{e},\ S''\rangle\times$$
$$\times\langle\lambda\mathbf{e},\ S''\,|\,j_{\rho}(0)\,|\,\mathbf{p},\ S'\rangle\,|_{E=-E_{\mathbf{p}}(\tau)}\doteq g^2(\tau)B(\tau,\mathbf{p}), \qquad (6.34.1)$$

$$+(2\pi)^3\left|1-\frac{E_{\mathbf{p}}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\right|\sum_{S''}\langle-\mathbf{p},S'\,|j_{\rho}(0)\,|-\lambda\mathbf{e},S''\rangle\times$$
$$\times\langle-\lambda\mathbf{e},S''\,|j_{\rho'}(0)\,|\,\mathbf{p},S\rangle|_{E=E_{\mathbf{p}}(\tau)}=g^2(\tau)A(\tau,\mathbf{p}), \qquad (6.34.2)$$

где $g(\tau)$ совпадает при $\tau=m^2$ с наблюдаемым ядерным зарядом реального нуклона[1]), а функции $B(\tau,\mathbf{p})$ и $A(\tau,\mathbf{p})$ (явный вид которых приводится в дополнении Б, формула (Б.18)) являются аналитическими функциями переменной τ во всей комплексной плоскости.

Итак, мы установили, — пока только для вещественных отрицательных $\tau<-\mathbf{p}^2$, — что $T(E,\tau)$ представляется в виде

$$T(E,\tau)=f(E,\tau)-2\pi i g^2(\tau)B(\tau,\mathbf{p})\,\delta\big(E+E_{\mathbf{p}}(\tau)\big)-$$
$$-2\pi i g^2(\tau)A(\tau,\mathbf{p})\,\delta\big(E-E_{\mathbf{p}}(\tau)\big), \qquad (6.35)$$

где

$$f(E,\tau)=0 \text{ для } |E|<\frac{2Mm-2\mathbf{p}^2+m^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}. \qquad (6.36)$$

6.8. Подытожим полученные пока результаты. Мы установили, что при выполнении условия (6.23):

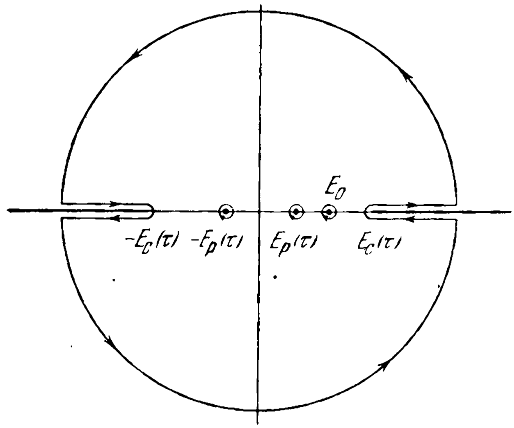
а) $ST^{\mathrm{ret}}(E,\tau)$ *будет аналитической функцией* E *в области* $\operatorname{Im}E>0$;

---

[1]) Объяснение того, что мы понимаем под этими словами, смотри ниже в пункте 6.12.1.

б) $ST^{\text{adv}}(E, \tau)$ *будет аналитической функцией* E *в области* $\operatorname{Im} E < 0$;

в) *на границе этих областей, при* $\operatorname{Im} E = 0$, *разность* $T(E, \tau)$ *представляется выражениями* (6.35,36). *При этом, если выполнены условия* (6.32) (*или хотя бы* (6.33), *но ниже мы будем предполагать первое*), *то на границе областей* (6.24) *имеется некоторый отрезок ненулевой длины, на котором* $ST(E, \tau) = 0$.



• -полюс — -линии разреза. → -контур интегрирования

Рис. 2.

Поэтому, повторяя рассуждения § 4, мы видим, что: $ST^{\text{ret}}(E, \tau)$ и $ST^{\text{adv}}(E, \tau)$ *можно рассматривать, как одну аналитическую функцию* $S\tilde{T}(E, \tau)$ *от* E, *с линиями разреза вдоль вещественной оси при*

$$E < -\frac{2Mm - 2\mathbf{p}^2 + m^2 - \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \quad \text{и при } E > \frac{2Mm - 2\mathbf{p}^2 + m^2 - \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}$$

и с полюсами в точках

$$E = \pm E_{\mathbf{p}}(\tau),$$

возрастающую на бесконечности не быстрее полинома степени n

(см. рис. 2; мы считаем выполненным условия (6.32)).

Таким образом, к функции

$$g(E)=\frac{S\widetilde{T}(E,\tau)}{(E-E_0)^{n+1}}, \qquad |E_0|<\frac{2Mm-2\mathbf{p}^2+m^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}$$

можно применить интегральную формулу Коши с контуром C (рис. 2), которая приведет нас к соотношению (E — комплексно!):

$$\frac{S\widetilde{T}(E,\tau)}{(E-E_0)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon}\frac{S\widetilde{T}(E',\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}\frac{S\widetilde{T}(E',\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Sf(E',\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)}-\frac{g^2(\tau)\,SB(\tau,\mathbf{p})}{(-E_{\mathbf{p}}-E_0)^{n+1}(-E_{\mathbf{p}}-E)}-$$

$$-\frac{g^2(\tau)\,SA(\tau,\mathbf{p})}{(E_{\mathbf{p}}-E_0)^{n+1}(E_{\mathbf{p}}-E)}+\sum_{(0\leqslant r\leqslant n)}c_2'(\tau,\mathbf{p},E_0)\,E^r.$$

Освобождаясь здесь от знаменателя и замечая, что в силу (1.13) $(n+1)$-е степени при полюсах в точках $E=\pm E_{\mathbf{p}}(\tau)$ можно уничтожить за счет переопределения коэффициентов у полинома по E, мы получим дисперсионное соотношение:

$$S\widetilde{T}(E,\tau)=\frac{(E-E_0)^{(n+1)}}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Sf(E',\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{(n+1)}(E'-E)}+$$

$$+\frac{g^2(\tau)\,SB(\tau,\mathbf{p})}{E+E_{\mathbf{p}}}+\frac{g^2(\tau)\,SA(\tau,\mathbf{p})}{E-E_{\mathbf{p}}}+\sum_{(0\leqslant r\leqslant n)}c_r(\tau,\mathbf{p},E_0)\,E^r \tag{6.37}$$

(E комплексно!).

Подчеркнем еще раз, что мы установили это соотношение *лишь для отрицательных* $-V<\tau<-\mathbf{p}^2$. Настоящие же дисперсионные соотношения, связывающие физически реальные величины, получились бы из (6.37) после перехода к пределу вещественных E только, если было бы установлено, что это соотношение остается справедливым и для

$$\tau = m^2.$$

6.9. Чтобы расширить область τ, для которых верно соотношение (6.37), мы *воспользуемся методом аналитического продолжения*. Для этого нам потребуется знать аналитические свойства функции $f(E, \tau)$. Исследованию этого вопроса будет посвящен следующий параграф, в котором мы установим общие аналитические свойства фурье-образа $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ для произвольных p, p' и $\frac{q+q'}{2}$. Сейчас же мы, несколько забегая вперед, воспользуемся получаемым там результатом, который, в применении к нашей функции $f(E, \tau)$, гласит, что:

Если все переменные E, τ и $\lambda = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}$ *вещественны,*

$$-V \leqslant \tau < (1+\rho)\, m^2 \tag{6.38}$$

(ρ — *некоторое положительное достаточно малое число, а* V — *произвольное, но фиксированное, положительное число*) *и* $\mathbf{p}^2$ *удовлетворяет условию*:

$$\mathbf{p}^2 < \sigma m^2; \quad \sigma = \frac{M}{M+m}\,^{1)}, \tag{6.42}$$

то функцию $Sf(E, \tau)$ *можно представить в форме*

$$Sf(E, \tau) = F_1(2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + \tau;\ \tau) + \\ + F_2(-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + \tau;\ \tau). \tag{6.39}$$

При этом функции $F_1(\xi;\ \tau)$ и $F_2(\xi;\ \tau)$ *будут обладать свойствами*:

(а) $F_i(\xi;\ \tau)$ — *обобщенные функции переменной* ζ;

(б) $F_i(\xi;\ \tau)$ — *аналитические функции второй переменной* τ, *регулярные в области*:

$$-V < \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)\, m^2, \qquad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2; \tag{6.40}$$

(в)

$$F_i(\xi;\ \tau) = 0 \quad \text{для} \quad \xi < 2Mm + m^2 - 2\mathbf{p}^2. \tag{6.41}$$

---

[1]) Дальнейшие исследования В. С. Владимирова показали, что это число σ можно увеличить по крайней мере до значения $\sigma = 2{,}56$ (при $\frac{M}{m} = 7$) [27]. *(Прим. при корректуре.)*

Что в этом представлении является существенным, а что — тривиальным? Чтобы выяснить это, заметим, что согласно (6.28) $f(E, \tau)$ состоит из двух сумм, первая из которых обращается в нуль для $E < E_c(\tau)$, а вторая — для $E > -E_c(\tau)$.

Если ввести теперь в качестве аргументов первой суммы вместо E и τ величины

$$\xi_1 = 2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} + \tau \text{ и } \tau,$$

а в качестве аргументов второй —

$$\xi_2 = -2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} + \tau \text{ и } \tau,$$

то мы сразу получаем для $f(E, \tau)$ представление:

$$f(E, \tau) = F_1(\xi_1;\ \tau) + F_2(\xi_2;\ \tau), \tag{6.39*}$$

где

$$F_i(\xi, \tau) = 0 \quad \text{для } \xi < 2Mm + m^2 - 2\mathbf{p}^2, \tag{6.41*}$$

причем по существу, чтобы достигнуть такого представления, достаточно потребовать не выполнения (6.23), но просто того, чтобы E, τ и $\lambda = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}$ были бы все вещественны.

Как мы видим, тривиальное представление (6.39*) тождественно с представлением (6.39), которое мы собираемся использовать (применение оператора S ничего не меняет). Для представления (6.39*) выполняются и свойства (в) (6.41*) и (а) (поскольку всякая функция вообще говоря — обобщенная).

Таким образом, существенно нетривиальным содержанием представления (6.39) является только свойство (б) — аналитичность функций $F_i(\xi, \tau)$ по второму аргументу в области (6.40).

Покажем теперь, что из представления (6.39) будет *непосредственно вытекать справедливость дисперсионного соотношения* (6.44) *и для нужных нам значений*

$$\tau = m^2. \tag{6.19}$$

6.9.1. Выберем сперва опять какое-либо отрицательное τ, удовлетворяющее (6.23). Для такого τ будут одновременно справедливыми и представление (6.39) и дисперсионное соотношение (6.37). Тогда, подставляя (6.39) в (6.37), найдем:

$$S\tilde{T}(E, \tau) = \Phi(E, \tau) + \\ + \frac{g^2(\tau)\,SA(\tau, \mathbf{p})}{E - E_{\mathbf{p}}(\tau)} + \frac{g^2(\tau)\,SB(\tau, \mathbf{p})}{E + E_{\mathbf{p}}(\tau)} + \sum_{(0 \leqslant r \leqslant n)} c_r(\tau, \mathbf{p}, E_0)\,E^r, \tag{6.43}$$

где мы положили

$$\Phi(E,\ \tau) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE'' F_1\,(2E''\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\ \tau)}{\left(E'' - \frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E\right)\left(E'' - \frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_0\right)^{n+1}} +$$

$$+ \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE'' F_2\,(2E''\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\ \tau)}{\left(-E'' + \frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E\right)\left(-E'' + \frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_0\right)^{n+1}}. \tag{6.44}$$

Исследуем аналитические свойства введенной этим определением функции $\Phi(E,\ \tau)$. Чтобы исследовать аналитичность по отношению к переменной E, воспользуемся теоремой:

Функция $f(E)$ будет аналитической функцией в такой области изменения комплексной переменной E, в которой знаменатель $(E - E')$ не обращается в нуль, коль скоро эту функцию можно представить в виде

$$f(E) = \int_C \frac{\varphi(E')\,dE'}{(E'-E)}, \tag{6.45}$$

где $\varphi(E')$ — произвольная функция, ограниченная лишь тем требованием, чтобы интеграл в (6.45) *имел бы смысл.*

Для функций $\varphi(E')$, квадратично интегрируемых, эта теорема хорошо известна в теории функций комплексного переменного; можно показать, что она сохраняет силу и если $\varphi(E')$—обобщенная функция, интегрируемая в некотором классе (см. § 1).

Применяя эту теорему к нашим интегралам (6.44), видим, что функция $\Phi(E,\ \tau)$ будет аналитической функцией E в такой области, где ни один из знаменателей

$$E'' - \left(\frac{\tau'}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} + E\right) \quad \text{и} \quad -\left\{E'' - \left(\frac{\tau'}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E\right)\right\}$$

не обращается в нуль, т. е. в области

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\tau'}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \pm E\right) \neq 0,$$

поскольку E'' вещественно. Это наверняка будет так, если мы ограничим область изменения переменных E и τ *строгим* неравенством:

$$\frac{|\operatorname{Im}\tau|}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}<|\operatorname{Im}E|.$$

Это — единственное требование, которое надо наложить, чтобы $\Phi(E, \tau)$ была бы аналитической по отношению к переменной E.

Перейдем теперь к аналитичности по отношению к переменной τ. Заметим прежде всего, что в силу свойства (б) представления (6.39) функции $F_i(\xi, \tau)$ являются аналитическими функциями τ в области (6.40). Поэтому, чтобы достигнуть аналитичности функции $\Phi(E, \tau)$ по τ, нам остается только позаботиться не расстроить аналитичности функций $F_i(\xi, \tau)$. Рассмотренный выше множитель в знаменателе не может сделать этого, поскольку, благодаря допущенному ограничению, он теперь уже не может обращаться в нуль. Но единственные остающиеся тогда под интегралом множители — это множители

$$\left(E'-\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}-E_0\right)^{n+1} \quad \text{или} \quad \left(-E'+\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}-E_0\right)^{n+1}$$

в знаменателе. Они также не смогут обратиться в нуль в действительной области интегрирования, если мы выберем постоянную E_0 лежащей в области, где оба подинтегральных выражения F_1 и F_2 обращаются в нуль, т. е. в силу (6.41) в области одновременного выполнения неравенств

$$-\frac{2Mm+m^2-2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}<E_0+\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}<\frac{2Mm+m^2-2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}$$

$$-\frac{2Mm+m^2-2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}<-E_0+\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}<\frac{2Mm+m^2-2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}.$$

(для вещественных τ)

Эти неравенства эквивалентны требованию

$$|E_0|<\frac{2Mm+m^2-2\mathbf{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}=E_c(\tau) \text{ для вещественных } \tau.$$

Но наши τ и $\mathbf{p}^2$ ограничены неравенствами:

$$\tau<(1+\rho)\,m^2 \text{ для вещественных } \tau \quad \text{и} \quad \mathbf{p}^2<\sigma m^2.$$

Поэтому сформулированное выше неравенство, ограничивающее E_0, будет выполнено, если потребовать

$$|E_0|<\frac{2Mm-(\rho+2\sigma)\,m^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}.$$

Итак, интегралы (6.44) определяют функцию $\Phi(E, \tau)$, аналитическую в области

$$\left.\begin{array}{l} -V < \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2, \ |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2, \\ |\operatorname{Im}\tau'| < 2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,|\operatorname{Im}E|, \end{array}\right\} \tag{6.46}$$

если мы выберем E_0 лежащим в интервале

$$-\frac{2Mm-(\rho+2\sigma)m^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} < E_0 < \frac{2Mm-(\rho+2\sigma)m^2}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}. \tag{6.47}$$

6.9.2. Но, с другой стороны, мы установили выше, что функция $S\tilde{T}(E, \tau)$ регулярна в областях (6.21) и (6.22), т. е. в области (6.23′). Исключим еще полюса, которыми обладает функция $S\tilde{T}(E, \tau)$ в точках $E = \pm E_{\mathbf{p}}(\tau)$ с помощью умножения на $(E^2 - E_{\mathbf{p}}^2(\tau))$. Тогда мы видим, что выражение

$$\{S\tilde{T}(E, \tau) - \Phi(E, \tau)\}\,(E^2 - E_{\mathbf{p}}^2(\tau)) \tag{6.48}$$

должно быть аналитической функцией обеих переменных E и τ в общей части областей (6.46) и (6.23′), т. е. в области

$$\left.\begin{array}{l} -V < \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2, \ |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2; \\ |\operatorname{Im}\tau| < 2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,|\operatorname{Im}E|; \\ |\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\mathbf{p}^2-\tau}\,| < |\operatorname{Im}E|. \end{array}\right\} \tag{6.49}$$

Но для вещественных $\tau < -\mathbf{p}^2$ эта разность должна, согласно дисперсионному соотношению (6.37), совпасть с полиномом по E:

$$g^2(\tau)SA(\tau, \mathbf{p})(E + E_{\mathbf{p}}(\tau)) + g^2(\tau)SB(\tau, \mathbf{p})(E - E_{\mathbf{p}}(\tau)) + \\ + (E^2 - E_{\mathbf{p}}^2(\tau)) \sum_{(0 \leqslant r \leqslant n)} c_r(\tau, \mathbf{p}, E_0)E^2. \tag{6.50}$$

Тогда она должна быть полиномом по E и во всей области аналитичности (6.49).

Напомним теперь, что аналитичность по τ функций $A(\tau, \mathbf{p})$ и $B(\tau, \mathbf{p})$ будет показана в дополнении Б (ср. (6.34)). Далее, $E_{\mathbf{p}}(\tau)$ является аналитической функцией τ по самому своему определению (6.26). Поэтому функции $g^2(\tau)$ и $c_r(\tau)$, определенные пока только для вещественных τ, удовлетворяющих

(6.23), должны *допускать аналитическое расширение на некоторую область комплексных значений* τ. Покажем, что эта область во всяком случае включает в себя всю область (6.40),

$$-V < \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2, \qquad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2. \tag{6.40}$$

В самом деле, выберем некоторое $\tau = \tau^*$, $\operatorname{Im}\tau^* \neq 0$, лежащее в области (6.40), и покажем, что к нему всегда можно подобрать соответствующее $E = E^*$ так, чтобы пара τ^*, E^* оказалась бы в области (6.49), например, положив

$$\left.\begin{aligned} &2\operatorname{Re}E^*\cdot\operatorname{Im}E^* = \operatorname{Im}\tau^*, \ \operatorname{Re}E^* < M, \\ &(\operatorname{Re}E^*)^2 - (\operatorname{Im}E^*)^2 - \operatorname{Re}\tau^* - \mathbf{p}^2 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

Действительно, замечая, что

$$\left(\operatorname{Im}\sqrt{E^{*2}-\mathbf{p}^2-\tau^*}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{[\operatorname{Re}(E^{*2}-\mathbf{p}^2-\tau^*)]^2+[\operatorname{Im}(E^{*2}-\tau^*)]^2}\, + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Re}\tau^* + \mathbf{p}^2 - \operatorname{Re}E^{*2}\right\},$$

видим, что при сделанном выборе E^*

$$\left(\operatorname{Im}\sqrt{E^{*2}-\mathbf{p}^2-\tau^*}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{[\operatorname{Re}(E^{*2}-\mathbf{p}^2-\tau^*)]^2} + \operatorname{Re}\tau^* + \mathbf{p}^2 - \operatorname{Re}E^{*2}\right\} =$$
$$= 0 < (\operatorname{Im}E^*)^2 \neq 0,$$

и, следовательно, неравенство

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{E^{*2}-\mathbf{p}^2-\tau^*}\right| < |\operatorname{Im}E^*|$$

выполняется. Далее,

$$|\operatorname{Im}\tau^*| = 2|\operatorname{Re}E^*||\operatorname{Im}E^*| < 2M|\operatorname{Im}E^*| < 2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,|\operatorname{Im}E^*|,$$

— т. е. все неравенства (6.49) действительно выполнены.

Таким образом, для любой точки τ^* из области (6.40) с $\operatorname{Im}\tau^* \neq 0$ всегда можно найти такое E^*, что пара τ^*, E^* будет лежать в области (6.49). Но отсюда следует, что функции $g^2(\tau)$ и $c_r(\tau)$ будут аналитическими во всей области (6.40) с возможной линией разреза вдоль вещественной оси. Покажем, что на самом деле такой линии разреза нет.

Рассмотрим для этого вещественное

$$-V < \tau_r < (1+\rho)m^2$$

и положим

$$\tau = \tau_\pm = \tau_r \pm i\eta, \qquad \eta > 0,$$
$$E = E_\pm = E_r \pm \frac{i\eta}{2E_r}, \qquad E_r > 0.$$

Чтобы такие пары τ, E входили бы в область (6.49), очевидно достаточно потребовать, чтобы

$$\mathbf{p}^2 + (1+\rho)\,m^2 < E_r^2 < M^2$$

(действительно, тогда при достаточно малых η точки τ_+, E_+ будут удовлетворять неравевствам (6.51), наложенным выше на точки τ^*, E^*). Но если точки $\tau_\pm$, $E_\pm$ входят в область (6.49), то они войдут и в область (6.46) аналитичности функции $\Phi(E, \tau)$. Поэтому $\Phi(E_\pm, \tau_\pm)$ будет аналитической функцией обоих аргументов. Но в область (6.46) входят и точки τ с $\operatorname{Im}\tau = 0$ (но не точки E с $\operatorname{Im} E = 0$!). Поэтому мы можем заключить по непрерывности, что

$$\lim_{\eta\to 0} \Phi(E_\pm, \tau_\pm) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \Phi(E_r \pm i\varepsilon, \tau_r).$$

Но разность

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\Phi(E_r + i\varepsilon, \tau_r) - \Phi(E_r - i\varepsilon, \tau_r)\right)$$

можно явно вычислить. Действительно, подставляя сюда интегралы (6.44), определяющие Φ, мы получим

$$\Phi(E_r + i\varepsilon, \tau_r) - \Phi(E_r - i\varepsilon, \tau_r) =$$
$$= \frac{(E_r - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1(2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\, \tau_r)\, dE'}{\left(E' - \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_0\right)^{n+1}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{E' - \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_r - i\varepsilon} - \frac{1}{E' - \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_r + i\varepsilon} \right) +$$
$$+ \frac{(E_r - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2(2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\, \tau_r)\, dE'}{\left(-E' + \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_0\right)^{n+1}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{-E' + \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_r - i\varepsilon} - \frac{1}{-E' + \dfrac{\tau_r}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} - E_r + i\varepsilon} \right),$$

где стоящие в круглых скобках разности сводятся в силу символического тождества (1.4) к δ-функциям, после чего интегрирование выполняется, и мы находим

$$\lim_{\eta\to 0}\,(\Phi(E_+,\tau_+)-\Phi(E_-,\tau_-)) = F_1\,(2E_r\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau_r;\ \tau_r) + \\ + F_2(-2E_r\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau_r;\ \tau_r) = Sf(E_r,\ \tau_r).$$

Если домножить теперь это равенство на исключающий δ-функции от $E\pm E_{\mathbf{p}}(\tau)$ множитель $E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau)$, то мы получим

$$\lim_{\eta\to 0}\,[\Phi(E_+,\tau_+)-\Phi(E_-,\tau_-)]\left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right) = \\ = Sf(E_r,\tau_r)\left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right) = ST(E_r,\tau_r)\left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right). \quad (6.52)$$

С другой стороны, наши пары точек E_+, τ_+ и E_-, τ_- приводят в пределе при $\eta\to 0$ к вещественным λ (мнимая часть λ будет порядка η^2); поэтому пара E_+, τ_+ входит в область (6.21), а пара E_-, τ_- — в область (6.22) и, следовательно, интегралы, соответствующие (6.20.1) и (6.20.2), от таких пар точек будут иметь смысл и сходиться, при $\eta\to 0$, к функциям $ST^{\mathrm{ret}}(E_r,\tau_r)$ или $ST^{\mathrm{adv}}(E_r,\tau_r)$ соответственно. Таким образом, будет выполняться предельное соотношение:

$$\lim_{\eta\to 0}\,\left\{S\widetilde{T}(E_+,\tau_+)-S\widetilde{T}(E_-,\tau_-)\right\} = ST(E_r,\tau_r).$$

Умножая его на $\left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right)$ и сравнивая с (6.52), видим, что

$$\left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right)\lim_{\eta\to 0}\left\{S\widetilde{T}(E_+,\tau_+)-\Phi(E_+,\tau_+)\right\} = \\ = \left(E_r^2-E_{\mathbf{p}}^2(\tau_r)\right)\lim_{\eta\to 0}\left\{S\widetilde{T}(E_-,\tau_-)-\Phi(E_-,\tau_-)\right\}.$$

Но в этом равенстве слева и справа стоят значения функции (6.48) от пар точек E_+, τ_+ и E_-, τ_-. Так как такие пары лежат в области (6.49), то функция (6.48) должна равняться для них полиному (6.50). Обозначая этот полином через $P_\tau(E)$, можем записать наше предельное соотношение в виде

$$\lim_{\eta\to 0} P_{\tau_+}(E_+) = \lim_{\eta\to 0} P_{\tau_-}(E_-).$$

Но полином — непрерывная функция. Поэтому можно написать

$$\lim_{\eta\to 0} P_{\tau_+}(E_r) = \lim_{\eta\to 0} P_{\tau_-}(E_r),$$

т. е. зависимость $P_\tau(E)$ от τ при переходе τ через вещественную ось также будет непрерывной. Но выше и ниже вещественной оси коэффициенты этого полинома зависят, как было установлено выше, от τ аналитически. Следовательно, аналитичность сохраняется и для точек вещественной оси τ, т. е. никакой линии разреза действительно не будет.

Итак, *функции* $g^2(\tau)$ *и* $c_r(\tau)$ *не обладают линиями разреза и регулярны во всей области* (6.40).

6.9.3. Вернемся теперь опять к соотношению (6.43). Аналитичность функций $g^2(\tau)$, $c_r(\tau)$, $E_{\mathbf{p}}(\tau)$, $A(\tau, \mathbf{p})$ и $B(\tau, \mathbf{p})$ по переменной τ в области (6.40) мы только что установили. Зависимость же трех последних членов в (6.43) от E — явная, и из нее сразу видно, что они будут аналитическими функциями E, во всяком случае для всех не чисто вещественных E. Итак, три последних члена в (6.43) являются аналитической функцией E и τ в области

$$-V < \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)\, m^2, \qquad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2, \qquad \operatorname{Im} E \neq 0. \tag{6.53}$$

Что же касается функции $\Phi(E, \tau)$, то мы уже установили выше, что она аналитична в области (6.46). Таким образом, вся правая часть соотношения (6.43) является аналитической функцией в области (6.46).

Поэтому мы можем теперь *расширить* область определения функции $S\tilde{T}(E, \tau)$ так, чтобы она *равнялась правой части* (6.43) *во всей области* (6.46).

6.9.4. Подчеркнем, что для *расширенной* таким образом функции сохраняются *обычные соотношения* с несобственными пределами:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0\\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau) = ST^{\overset{\text{ret}}{\overline{\text{adv}}}}(E, \tau), \tag{6.54}$$

если только E, τ и $\lambda = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}$ все вещественны и

$$-V \leqslant \tau < (1+\rho)\, m^2. \tag{6.38}$$

Выполнение этих несобственных предельных соотношений было бы очевидным, если бы допредельные аргументы были расположены в области (6.49). Действительно, тогда (1) функция $S\tilde{T}(E, \tau)$ была бы аналитической и (2) можно было бы непосредственно использовать интегралы (6.20) для $ST^{\overset{\text{ret}}{\overline{\text{adv}}}}$. Однако легко видеть, что смещая точку E в (6.54) с вещественной оси, мы выходим из этой области, поскольку при этом может нарушиться последнее из неравенств, определяющих (6.49).

Чтобы обойти эту трудность, заметим, что согласно (6.43) функция $S\tilde{T}$ (аналитическая, как только что было установлено, в области (6.46)) будет аналитической функцией как для пары аргументов $E \pm i\varepsilon$, τ, так и для пары, получающейся из предыдущей, если достаточно мало сместить с вещественной оси второй аргумент τ, т. е. для пары $E \pm i\varepsilon$, $\tau \pm 2i\alpha E\varepsilon$.

Поэтому мы можем заменить предельный переход (6.54) другим предельным переходом

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau \pm 2i\alpha E\varepsilon)$$

с

$$|\alpha| < \frac{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}{E}.$$

Но этой мнимой добавкой к τ можно распорядиться так, чтобы точка $E \pm i\varepsilon$, $\tau \pm 2i\alpha E\varepsilon$ не вышла бы за пределы области (6.49) (мы не будем останавливаться здесь на несколько громоздкой выкладке, подтверждающей это утверждение). Поэтому мы сможем воспользоваться формулами (6.20) и написать

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau \pm 2i\alpha E\varepsilon) =$$

$$= S \int e^{\mp \varepsilon x^0 + \mathbf{x}\mathbf{e}\,\mathrm{Im}\sqrt{(E \pm i\varepsilon)^2 - \mathbf{p}^2 - (\tau \pm 2i\alpha E\varepsilon)}} \times$$

$$\times e^{i\left(Ex^0 - \mathbf{x}\mathbf{e}\,\mathrm{Re}\sqrt{(E \pm i\varepsilon)^2 - \mathbf{p}^2 - (\tau \pm 2i\alpha E\varepsilon)}\right)} F^{\frac{\mathrm{ret}}{\mathrm{adv}}}(x)\, dx$$

с

$$\left|\mathrm{Im}\sqrt{(E \pm i\varepsilon)^2 - \mathbf{p}^2 - (\tau \pm 2i\alpha E\varepsilon)}\right| < \varepsilon,$$

ввиду чего

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S\tilde{T}(E \pm i\varepsilon, \tau \pm 2i\alpha E\varepsilon) = ST^{\frac{\mathrm{ret}}{\mathrm{adv}}}(E, \tau),$$

что доказывает соотношение (6.54).

6.9.5. Таким образом, мы установили дисперсионное соотношение (6.43) во всей области (6.46), равно как и то, что для $S\tilde{T}(E, \tau)$ с E, τ из (6.46) выполняются обычные предельные переходы (6.54) в запаздывающую и опережающую функции.

Но в область (6.46) входят, в частности, все точки с $\mathrm{Im}\, E \neq 0$ и вещественным $-V < \tau < (1 + \rho) m^2$. Поэтому соотношение (6.43) будет верно всегда, когда

$$\operatorname{Im} E \neq 0, \quad \tau = m^2,$$

т. е. для действительно нужного нам значения τ.

Проводя теперь в интегралах (6.43, 44) замену переменных интегрирования, обратную использованной при переходе от (6.37) к (6.43), получим снова дисперсионное соотношение (6.37), в котором только на месте функции $Sf(E', m^2)$ будет теперь стоять выражение

$$\overline{Sf}(E', m^2) = F_1(2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + m^2;\ m^2) + \\ + F_2(-2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + m^2;\ m^2), \quad (6.55)$$

т. е. дисперсионное соотношение:

$$S\tilde{T}(E, m^2) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \times$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1(2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + m^2;\ m^2) + F_0(-2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + m^2;\ m^2)}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} dE'$$
$$+ \frac{g^2(m^2)\, SB(m^2, \mathbf{p})}{E + E_{\mathbf{p}}(m^2)} + \frac{g^2(m^2)\, SA(m^2, \mathbf{p})}{E - E_{\mathbf{p}}(m^2)} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant n} c_r E^r. \quad (6.56)$$

Заменившее теперь функцию $Sf(E, m^2)$ выражение (6.55)

а) при $|E| > \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$ совпадает с $Sf(E, m^2)$;

б) в интервале

$$\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} < |E| < \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}, \quad (6.57)$$

где непосредственное определение функции

$$Sf(E, m^2) = ST(E, m^2)$$

через интеграл (6.20.3) смысла не имеет, выражение (6.55) можно рассматривать, как надлежащее аналитическое продолжение этой функции на интервал (6.57);

в) при $|E| < \dfrac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}$ выражение (6.55) обращается в нуль.

Итак, мы *доказали выполнение дисперсионного соотношения* (6.37) *для нужных нам значений* τ, *если использовать расширенную функцию* (6.55).

6.10. В выведенных нами дисперсионных соотношениях (6.37) или (6.56) пока считается, что энергия E комплексна, $\operatorname{Im} E \neq 0$. Чтобы перейти к представляющим непосредственный интерес вещественным значениям E, подставим в (6.56) допустимое комплексное значение

$$E + i\varepsilon \qquad (E \in R),$$

и устремим ε к нулю, воспользовавшись для проведения предельного перехода к левой части установленными выше формулами (6.54), а в правой — символическим тождеством (1.4). Тогда, в зависимости от знака ε, мы получим, если воспользоваться сокращенным обозначением $\overline{S}f(E, \; m^2)$,

$$\begin{aligned} S\overline{T}^{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(E, m^2) = {} & \pm \frac{1}{2} ST(E, m^2) + \\ & + \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{S}f(E', m^2)}{(E'-E_0)^{n+1}} P \frac{1}{E'-E} dE' + \\ & + P \frac{g^2(m^2) SB(m^2, \mathbf{p})}{E + E_{\mathbf{p}}(m^2)} + P \frac{g^2(m^2) SA(m^2, \mathbf{p})}{E - E_{\mathbf{p}}(m^2)} + \sum_{0 \leqslant r \leqslant n} c_r E^r. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (6.35), чтобы объединить в ST все возникающие при применении (1.4) к знаменателям δ-члены. (Заметим, что, поскольку мы считаем сейчас энергию E (но не E') лежащей в наблюдаемой области, то способ обхода полюса в членах с g^2 справа конечно безразличен. Но в наблюдаемой области обращаются в нуль и возникающие из-за изменения способа такого обхода члены с $\delta(E \pm E_{\mathbf{p}})$.)

Складывая теперь оба соотношения (6.58) и переходя с помощью (3.34), (3.35) и (6.9) к функциям $D_{\alpha\omega}(E, m^2)$ и $A_{\alpha\omega}(E, m^2)$, мы получим дисперсионное соотношение, связывающее теперь уже непосредственно интересующие нас величины — эрмитову и антиэрмитову части амплитуды рассеяния:

$$SD_{a\omega}(E)=\frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi}P\int\limits_{-\infty}^{-\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}} dE'\frac{S\bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}}+$$

$$+\frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi}P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{+\infty} dE'\frac{S\bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}}+$$

$$+P\frac{g^2(m^2)\,SB(m^2,\mathbf{p})}{E+E_\mathbf{p}}+P\frac{g^2(m^2)\,SA(m^2,\mathbf{p})}{E-E_\mathbf{p}}+\sum_{0\leqslant r\leqslant n}c_rE^r. \tag{6.59}$$

Мы воспользовались здесь тем, что в области $|E|>\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}$, по которой только и производится интегрирование в (6.59), можно написать

$$\overline{Sf}(E',\ m^2)=\overline{ST}(E',\ m^2)=2i\bar{A}_{a\omega}(E'),$$

где, таким образом, $\bar{A}_{\sigma\omega}(E)$ означает антиэрмитову часть амплитуды рассеяния, продолженную в ненаблюдаемую область с помощью проведенной выше процедуры. Кроме того, мы перестали, где этого не требуется, отмечать аргумент $\tau=m^2$; так, например, $E_\mathbf{p}$ означает теперь

$$E_\mathbf{p}=E_\mathbf{p}(m^2)=\frac{2\mathbf{p}^2+m^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \tag{6.60}$$

— действительную энергию однонуклонных промежуточных состояний.

6.11. Чтобы дисперсионные соотношения (6.59) можно было бы непосредственно применять, в них надо еще избавиться от интегрирования по отрицательным энергиям и, затем, выразить через наблюдаемые величины входящие в полином по E неопределенные константы c_r. Этого можно будет достигнуть, используя установленные выше свойства симметрии (6.10) и, для исключения констант, проведя явно вычитательную процедуру.

Прежде чем, однако, переходить к выполнению этих операций, мы сделаем допущение, что

степень роста полинома в (6.59), n, *равна единице*. (6.61)

Это — некоторое новое дополнительное предположение; в §§ 4 и 5 мы уже сталкивались с таким положением, когда нам приходилось, поскольку мы не ссылаемся на какой-либо конкретный вид лагранжиана, *постулировать порядок роста матричных элементов* на бесконечности. Наше конкретное допущение (6.61), с одной стороны, находится в согласии с результатами теории возмущений для псевдоскалярной мезонной теории, а с другой — подсказывается опытным материалом: полином более высокой степени привел бы к более чем линейному росту $D_{\alpha\omega}(E)$ с энергией, что противоречило бы эксперименту.

6.11.1. Переходя в соотношениях симметрии (6.10) к нашей системе координат и применяя к ним операции S симметризации и антисимметризации по **e**, устанавливаем, что входящие в дисперсионные соотношения симметризованные (антисимметризованные) по **e** и по изотопическим индексам мезонов комбинации $A_{\sigma\omega}(E)$ обладают следующими свойствами симметрии по энергии (ср. (6.16.)):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(-E) &= -\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(E),\\
\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(-E) &= +\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(E),\\
\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(-E) &= +\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(E),\\
\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(-E) &= -\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\sigma\omega}(E).
\end{aligned}\right\} \qquad (6.62)$$

Что же касается свойств симметрии для эрмитовых частей $D_{\alpha\omega}(E)$, то их нет нужды выписывать, поскольку они в точности противоположны (6.62).

6.11.2. Отметим теперь, что имеют место два тождества:

$$\left.\begin{aligned}
&(E-E_0)^2\left[\frac{1}{(E'-E)(E'-E_0)^2}-\frac{1}{(-E'-E)(-E'-E_0)^2}\right]=\\
&\quad=2(E^2-E_0)\frac{E'}{(E'^2-E^2)(E'^2-E_0^2)}-4E_0(E-E_0)\frac{E'}{(E'^2-E_0^2)},
\end{aligned}\right\} \qquad (6.63)$$

и

$$\left.\begin{aligned}&(E-E_0)^2\left[\frac{1}{(E'-E)\,(E'-E_0)^2}+\frac{1}{(-E'-E)\,(-E'-E_0)^2}\right]=\\&=2E\,(E^2-E_0^2)\frac{1}{(E'^2-E^2)\,(E'^2-E_0^2)}-4E_0^2\,(E-E_0)\,\frac{1}{(E'^2-E_0^2)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{6.63}$$

Поэтому, применив к интегралам по отрицательным энергиям в (6.59) соотношения симметрии (6.62), мы получим сейчас же (во вторых членах в правой части тождеств (6.63) зависимость от E и от E' факторизуется; после интегрирования по E' они приведут просто к полиномам по E, которые можно считать включенными в полиномы c_0+c_1E):

$$\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,D_{\sigma\omega}(E)=$$

$$=\frac{2}{\pi}(E^2-E_0^2)P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\,\frac{E'\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,\bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'^2-E^2)\,(E'^2-E_0^2)}+$$

$$+g^2\,\frac{\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,B\,(m^2,\mathbf{p})}{E+E_{\mathbf{p}}}+g^2\,\frac{\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,A\,(m^2,\mathbf{p})}{E-E_{\mathbf{p}}}+c_{10}+c_{11}E,$$

$$\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1-P_{\rho\rho'})\,D_{\sigma\omega}\,(E)=$$

$$=\frac{2}{\pi}E\,(E^2-E_0^2)\,P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\,\frac{\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1-P_{\rho\rho'})\,\bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'^2-E^2)\,(E'^2-E_0^2)}+$$

$$+g^2\,\frac{\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1-P_{\rho\rho'})\,B\,(m^2,\mathbf{p})}{E+E_{\mathbf{p}}}+g^2\,\frac{\mathfrak{S}\mathbf{e}\,(1-P_{\rho\rho'})\,A\,(m^2,\mathbf{p})}{E-E_{\mathbf{p}}}+c_{20}+c_{21}E,$$

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,D_{\sigma\omega}(E)=$$

$$=\frac{2}{\pi}E\,(E^2-E_0^2)P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\,\frac{\mathfrak{A}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,\bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'^2-E^2)\,(E'^2-E_0^2)}+$$

$$+g^2\,\frac{\mathfrak{A}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,B\,(m^2,\mathbf{p})}{E+E_{\mathbf{p}}}+g^2\,\frac{\mathfrak{A}\mathbf{e}\,(1+P_{\rho\rho'})\,A\,(m^2,\mathbf{p})}{E-E_{\mathbf{p}}}+c_{30}+c_{31}E,$$

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{e}} = (1 - P_{\rho\rho'}) D_{\sigma\omega}(E) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(E^2 - E_0^2) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \frac{E' \mathfrak{A}_{\mathbf{e}} (1 - P_{\rho\rho'}) \bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - E_0^2)} +$$

$$+ g^2 \frac{\mathfrak{A}_{\mathbf{e}} (1 - P_{\rho\rho}) B(m^2, \mathbf{p})}{E + E_{\mathbf{p}}} + g^2 \frac{\mathfrak{A}_{\mathbf{e}} (1 - P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p})}{E - E_{\mathbf{p}}} + c_{40} + c_{41} E.$$

6.11.3. Используем теперь свойства симметрии, чтобы упростить выражения для вклада от однонуклонного состояния.

Из выражений (6.34.1) и (6.34.2) для $B(\tau, \mathbf{p})$ и $A(\tau, \mathbf{p})$ видно (в дополнении Б, формула (6.18), будет показано также, что эти величины зависят от E только через посредство $\lambda = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}$ и потому не меняются при замене $E_{\mathbf{p}}$ на $-E_{\mathbf{p}}$), что они обладают свойством симметрии

$$B(\tau, \mathbf{p}) = -P_{\rho\rho'} P_{\mathbf{e}} A(\tau, \mathbf{p}) \tag{6.64}$$

(здесь $P_{\mathbf{e}}$ — оператор замены $\mathbf{e} \to -\mathbf{e}$). Поэтому для них имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1 + P_{\rho\rho'}) B(m^2, \mathbf{p}) &= -\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1 + P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p}),\\
\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1 - P_{\rho\rho'}) B(m^2, \mathbf{p}) &= +\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1 - P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p}),\\
\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1 + P_{\rho\rho'}) B(m^2, \mathbf{p}) &= +\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1 + P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p}),\\
\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1 - P_{\rho\rho'}) B(m^2, \mathbf{p}) &= -\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1 - P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p}),
\end{aligned}$$

которые позволят нам объединить в дисперсионных соотношениях оба члена, описывающих вклад однонуклонных состояний. Практически это удобнее сделать, записав предварительно:

$$\frac{1}{E \pm E_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{E \pm E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{E - E_0}{\mp E_{\mathbf{p}} - E_0} \right)^2 + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 E,$$

где возникающий полином можно будет опять включить в наши общие полиномы. Тогда для разности и суммы двух таких выражений можно будет непосредственно применить тождества (6.63) и мы получим в однонуклонных членах точно такие же комбинации, что и в интегральных, только с E', замененным на $E_{\mathbf{p}}$.

6.11.4. Наконец, напомним (ср. (6.10)), что стоящие в левых частях дисперсионных соотношений симметризованные комбинации функций $D_{\sigma\omega}(E)$ также обладают определенной симметрией по E — именно, в первом и последнем из выписанных соотношений слева стоят четные функции E, а во втором и третьем — нечетные. Легко видеть, что интегральные члены, равно как и преобразованные, как только что было описано, вклады однонуклонных состояний, сами обладают должной симметрией. Поэтому такой же симметрией должны обладать и произвольные пока полиномы по E, т. е. в первом и последнем соотношениях может присутствовать только произвольная константа, а во втором и третьем — только линейный по E член.

6.11.5. Таким образом, в каждом из дисперсионных соотношений у нас остается по одной постоянной, которую нельзя определить из эксперимента. Чтобы исключить их, прибегнем к вычитательной процедуре.

Напомним, что согласно смыслу проведенного выше вывода дисперсионных соотношений энергия E_0 должна лежать в *ненаблюдаемой области*, причем в части ее, не занятой непрерывным спектром. Мы хотим перейти теперь к другой фиксированной энергии, E_0', которую мы хотим теперь выбрать в *наблюдаемой области*, и связать остававшиеся пока произвольными постоянные со значениями действительных частей амплитуд рассеяния для этой фиксированной энергии E_0'.

Заметим для этого, что «ядра» наших интегралов обладают своеобразным «групповым свойством» относительно сдвига фиксированной энергии E_0. Именно, легко видеть, что выполняются тождества:

$$\left(E^2-E_0^2\right)\frac{E'}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}-\left(E_0'^2-E_0^2\right)\frac{E'}{\left(E'^2-E_0'^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}=$$
$$=\left(E^2-E_0'^2\right)\frac{E'}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0'^2\right)}, \tag{6.65.1}$$

$$E\left(E^2-E_0^2\right)\frac{1}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}-\frac{E}{E_0'}E_0'\left(E_0'^2-E_0^2\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\left(E'^2-E_0'^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}=E\left(E^2-E_0'^2\right)\frac{1}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0'^2\right)}. \tag{6.65.2}$$

Тем же свойством обладают, конечно, и члены, представляющие вклады однонуклонных состояний.

Поэтому, если мы напишем наши дисперсионные соотношения один раз для энергии E, а второй раз для энергии E_0' и после этого почленно вычтем из дисперсионных соотношений для E соответствующие соотношения (для первого и последнего дисперсионных соотношений) для энергии E_0', или (для второго и третьего) — соотношения для энергии E_0', помноженные на $\frac{E}{E_0'}$, — то мы получим в правых частях точно те же выражения, в которых вместо энергии E_0 будет стоять теперь энергия E_0' из наблюдаемой области, а имевшиеся ранее произвольные константы уничтожатся:

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(E^2-E_0^2\right)P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\frac{E'\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}\left(1+P_{\rho\rho}\right)\bar{A}_{\alpha\omega}(E')}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}-$$

$$-2g^2\frac{\left(E^2-E_0^2\right)E_{\mathbf{p}}}{\left(E_{\mathbf{p}}^2-E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2-E_0^2\right)}\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}\left(1+P_{\rho\rho'}\right)A(m^2,\mathbf{p}),\quad(6.66.1)$$

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-\frac{E}{E_0}\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=$$

$$=\frac{2}{\pi}E\left(E^2-E_0^2\right)P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\frac{\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}\left(1-P_{\rho\rho'}\right)\bar{A}_{\alpha\omega}(E')}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}-$$

$$-2g^2\frac{E\left(E^2-E_0^2\right)}{\left(E_{\mathbf{p}}^2-E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2-E_0^2\right)}\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A(m^2,\mathbf{p}),\quad(6.66.2)$$

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-\frac{E}{E_0}\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=$$

$$=\frac{2}{\pi}E\left(E^2-E_0^2\right)P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty}dE'\frac{\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}\left(1+P_{\rho\rho'}\right)\bar{A}_{\alpha\omega}(E')}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}-$$

$$-2g^2\frac{E\left(E^2-E_0^2\right)}{\left(E_{\mathbf{p}}^2-E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2-E_0^2\right)}\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A(m^2,\mathbf{p}),\quad(6.66.3)$$

$$\mathfrak{A}_e (1 - P_{\rho\rho'}) D_{\sigma\omega}(E) - \mathfrak{A}_e (1 - P_{\rho\rho'}) D_{\sigma\omega}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(E^2 - E_0^2\right) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \frac{E' \mathfrak{A}_e \left(1 - P_{\rho\rho'}\right) \bar{A}_{\sigma\omega}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} -$$

$$- 2g^2 \frac{\left(E^2 - E_0^2\right) E_{\mathbf{p}}}{\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E_0^2\right)} \mathfrak{A}_e (1 - P_{\rho\rho'}) A(m^2, \mathbf{p}) \quad (6.66.4)$$

(мы опустили здесь штрих у энергии E_0, поскольку прежнее обозначение E_0 нам больше не встретится).

6.12. Дисперсионные соотношения (6.66) уже не содержат более ни интегрирования по отрицательным энергиям, ни не имеющих физического смысла неопределенных постоянных. В самом деле, поскольку мы считаем теперь, что энергия E_0 лежит в наблюдаемой области,

$$E_0 > \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (6.67)$$

то $D_{\sigma\omega}(E_0)$ можно определить экспериментально. Далее, величина $A(m^2, \mathbf{p}^2)$ будет явно вычислена в дополнении Б (Б.18.1). Таким образом, в соотношениях (6.66) остается неразъясненной только постоянная

$$g = g(\tau)\,|_{\tau = m^2}. \quad (6.68)$$

Остановимся на вопросе о ее физическом смысле.

6.12.1. Как известно, вопрос о том, что назвать «экспериментальным мезонным зарядом реального нуклона», не решается, в отличие от аналогичного вопроса в электродинамике, однозначно. В последнем случае общепринятым является определение экспериментального электромагнитного заряда как коэффициента, стоящего при тройной вершине для равных и реальных импульсов заряженной частицы и равного нулю импульса фотона. С формальной точки зрения такое определение оказывается возможным, поскольку для этих значений импульсов частицы одновременно как импульс фотона оказывается реальным, так оказывается возможным и удовлетворить законам сохранения (импульс $q = 0$ может относиться к реальному фотону!). Физически такое определение означает апелляцию к опытам по поведению электрона в медленно меняющихся макроскопических полях типа опыта Милликена и, в конечном счете, по существу к возможности определить электромагнитный заряд в чисто макроскопических опытах, исследующих взаимное притяжение заряженных бузинных шариков.

В мезодинамике подобный путь является закрытым — из-за экспоненциального спадания ядерного поля с расстоянием (обусловленного конечностью массы мезонов) макроскопической мезодинамики не существует, и потому определить мезонный заряд из макроскопических опытов нельзя. Формально это проявляется в том, что (из-за той же конечности массы мезона) нельзя так подобрать импульсы тройной вершины, чтобы одновременно (а) они были вещественны, (б) отвечали бы реальным частицам и чтобы (в) выполнялись законы сохранения, — т. е. чтобы был возможен реальный процесс.

Поэтому, как бы мы ни построили определение «экспериментального мезонного заряда реального нуклона», оно обязательно будет формальным и будет относиться к величине, фигурирующей лишь в теоретических выкладках, но отнюдь не поддающейся непосредственному определению на опыте. Конкретный выбор определения не будет иметь при этом принципиального значения, надо лишь, чтобы такое определение было четко сформулировано. Поэтому мы вправе определить экспериментальный мезонный заряд реального нуклона, как коэффициент при тройной вершине для случая, когда, во-первых, выполнены законы сохранения и, во-вторых, все три импульса относятся к реальным частицам.

Составляющие импульсов неизбежно окажутся при этом комплексными, поэтому непосредственно определить удовлетворяющий таким условиям заряд через вакуумное среднее третьей вариационной производной матрицы рассеяния (которое будет играть при нашем способе построения теории роль коэффициента у операторов поля при тройной вершине) нельзя, и мы естественно приходим к тому, чтобы воспользоваться методом аналитического продолжения, т. е. сначала ввести, с помощью соотношения (Б.11) из дополнения Б, функцию $g(q^2)$ для $q^2 = \tau$, удовлетворяющих неравенству (6.23), затем выполнить (возможность чего будет доказана в Б.5) аналитическое продолжение этой функции вплоть до отвечающего реальному мезону значения $\tau = m^2$ и определить экспериментальный мезонный заряд реального нуклона, как значение введенной в (Б.11) функции $g(q^2)$ для $q^2 = m^2$, т. е. как

$$g = g(q^2)\,|_{q^2=m^2}. \tag{6.69}$$

Выкладки раздела Б.5 показывают, что так определенный заряд будет вещественным.

Итак, единственной входящей в (6.66) не наблюдаемой на опыте постоянной можно придать ясный и важный физический смысл и (см. ниже § 8) сами соотношения (6.66) можно будет использовать для экспериментального определения этой постоянной.

6.12.2. Однако в интеграле по E' в наших дисперсионных соотношениях (6.66) все еще остается интегрирование по части ненаблюдаемой области, именно, по части, занятой непрерывным спектром. Хотя выше и было показано, что антиэрмитову часть амплитуды рассеяния $\overline{A}_{\eta\omega}(E)$ можно получить в этой области аналитическим продолжением из наблюдаемой области, ясно, что реально такое продолжение можно было бы осуществить, лишь если бы имели полученное из теории аналитическое выражение для $A_{\eta\omega}(E)$, но не только находимые из опыта приближенные численные значения. Поэтому, поскольку теория мезон-нуклонного взаимодействия пока отсутствует, практически вычислить эту часть интеграла не удается, и нам придется просто пренебречь ею, выполняя интегрирование не от приведенного в (6.66) нижнего предела, а от границы наблюдаемой области $\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$. Заметим лишь, что для рассеяния вперед, когда $\mathbf{p}=0$, этой части интеграла вообще не будет, поскольку при этом непрерывный спектр не заходит в ненаблюдаемую область..

§ 7. ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ $ST_{\alpha\omega}$

Излагая в предыдущем параграфе вывод дисперсионных соотношений, мы приняли без доказательства то утверждение, что функцию $Sf_{\alpha\omega}(E, \tau)$ можно представить в виде (6.39) через функции F_1 и F_2, обладающие свойствами (а), (б), (в) из пункта **6.9**. Чтобы доказать это утверждение, нам понадобится предпринять теперь более детальное исследование аналитического поведения функции ST.

7.1. Установим сначала некоторые алгебраические соотношения. Напомним прежде всего, что согласно (6.3) функция T была определена, как фурье-образ

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \int dx e^{i\frac{q+q'}{2}x} F_{\alpha\omega}(x) \tag{7.1}$$

функции $F_{\alpha\omega}(x)$, соответствовавшей матричному элементу (взятому между двумя однонуклонными состояниями) коммутатора двух бозевских токов:

$$e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}(x-y) = \\ = i\langle \mathbf{p}', S' \mid j_{\rho'}(x) j_\rho(y) - j_\rho(y) j_{\rho'}(x) \mid \mathbf{p}, S\rangle. \tag{3.23}$$

Поэтому, проводя в (3.23) преобразование Фурье по обеим координатам, мы получим:

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2} + p_3\right) \delta(p'-p+p_3+p_4) = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \langle \mathbf{p}', S' \mid j_{\rho'}(x_3) j_\rho(x_4) - j_\rho(x_4) j_{\rho'}(x_3) \mid \mathbf{p}, S\rangle \, e^{i(p_3x_3+p_4x_4)} \times \\ \times dx_3\, dx_4 \quad (p'^0 = \sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}; \quad p^0 = \sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}).$$

Выразим здесь стоящие под интегралом матричные элементы через вакуумные средние с помощью принципа II.3 из § 2. Используя формулу (Б.4), найдем, что

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)\delta(p'-p+p_3+p_4)=$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^7}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\int e^{i(p'x_1-px_2+p_3x_3+p_4x_4)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\times$$

$$\times\left\langle 0\left|\frac{\delta^2}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)}\left[j_{\rho'}(x_3),\ j_\rho(x_4)\right]\right|0\right\rangle u^{+S}(\mathbf{p}). \quad (7.2)$$

Введем для стоящего под интегралом вакуумного среднего обозначение

$$\left\langle 0\left|\frac{\delta^2\,[j_{\rho'}(x_3),\,j_\rho(x_4)]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle = D(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4). \quad (7.3)$$

Заметим теперь, что если у нас имеется некоторая трансляционно-инвариантная функция $F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, то ее полный фурье-образ, — получаемый, если провести независимые преобразования типа (6.3) по каждой из координат $x_1,\ldots,x_4$, — будет пропорционален δ-функции от суммы импульсов. Для дальнейшего нам будет удобно называть в таких случаях фурье-образом *коэффициент* при этой δ-функции (деленный на $(2\pi)^4$), который мы будем обозначать через $\tilde{F}(p_1,p_2,p_3,p_4)$. Итак, положим[1]:

$$\int F(x_1,\ \ldots,\ x_4)\,e^{i(p_1x_1+\ldots+p_4x_4)}\,dx_1\ldots dx_4=$$

$$=(2\pi)^4\,\delta(p_1+\ldots+p_4)\,\tilde{F}(p_1,\ \ldots,\ p_4), \quad (7.4)$$

если

$$F(x_1+a,\ \ldots,\ x_4+a)=F(x_1,\ \ldots,\ x_4). \quad (7.5)$$

---

[1]) Легко видеть, что такое обозначение согласуется как с используемой нами общей нормировкой при переходе к фурье-образам:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=(2\pi)^{-4n}\int dk_1\ldots dk_n\exp\left\{-i\sum k_ix_i\right\}T(k_1,\ldots,k_n),$$

так и, с другой стороны, с выбором нормировок при переходе к фурье-образу для явной функции от разности двух 4-точек, например в (6.3).

Сравнивая это определение с соотношением (7.2), видим, что интересующая нас функция $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ будет выражаться через фурье-образ функции (7.3), $\tilde{D}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, если положить в нем

$$p_1 = p'; \quad p_2 = -p; \quad p_3 = q'; \quad p_4 = -q, \tag{7.6}$$

т. е.

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\,\tilde{D}\,(p', -p, q', -q)\,u^{+S}(\mathbf{p}), \tag{7.7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &p'^0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}'^2}; \quad p^0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}; \quad p' + q' - p - q = 0,\\ &q'^0 = \sqrt{\mathbf{q}'^2 + \tau}; \qquad q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \tau}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

7.2. Исследуем, как зависит $\tilde{D}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ от своих аргументов. Выполняя в (7.3) вариационное дифференцирование, найдем, что

$$D(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{(1 \leqslant a \leqslant 4)} (1 - P_{\rho\rho'}P_{34})\,D^{(a)}(x_1, \ldots, x_4), \tag{7.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4) &= \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\overline{\psi}(x_1)} \cdot \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle;\\ D^{(2)}(x_1, \ldots, x_4) &= \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \cdot \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\overline{\psi}(x_1)} \right| 0 \right\rangle \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} D^3(x_1, \ldots, x_4) &= \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}_1)\,\delta\psi(x_2)} \cdot j_\rho(x_4) \right| 0 \right\rangle;\\ D^4(x_1, \ldots, x_4) &= -\left\langle 0 \left| j_\rho(x_4) \cdot \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

а P_{34} означает оператор перестановки индексов 3 и 4.

Будем считать, что соответствующее (7.9) разбиение в сумму выполнено и для функции $\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4)$. Легко видеть, что тогда для интересующих нас значений τ, удовлетворяющих (6.38), два последние члена в такой сумме не дадут вклада в $\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4)$.

В самом деле, рассматривая, например, функцию $D^{(3)}(x_1, \ldots, x_4)$ и применяя формулу (2.6) разложения по полной системе функций, найдем

$$D^{(3)}(x_1, \ldots, x_4) = \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta \bar{\psi}(x_1)\, \delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle \langle 0 | j_\rho(x_4) | 0 \rangle +$$
$$+ \sum_n \int d\mathbf{k} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta \bar{\psi}(x_1)\, \delta\psi(x_2)} \right| n, \mathbf{k} \right\rangle \langle n, \mathbf{k} | j_\rho(x_4) | 0 \rangle. \quad (7.12)$$

Но среднее по вакууму от тока равно нулю в силу (3.6), что же касается элемента перехода тока между состояниями $|n, \mathbf{k}\rangle$ и вакуумом, то благодаря трансляционной инвариантности его можно записать в виде

$$\langle n, \mathbf{k} | j_\rho(x_4) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{k} | j_\rho(0) | 0 \rangle\, e^{ik_n x_4},$$

где

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{k}; \qquad k_n^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_n^2}.$$

Наконец, в § 4 было установлено, что матричные элементы

$$\langle n, \mathbf{k} | j_\rho(0) | 0 \rangle$$

равны нулю и для одномезонных или двумезонных состояний. Таким образом, в сумме (7.12) могут участвовать лишь состояния с

$$M_n > 3m$$

и, следовательно, в фурье-разложении $D^{(3)}$ могут участвовать экспоненты $\exp\{ip_4x_4\}$ лишь с

$$p_4^2 > (3m)^2.$$

Таким образом,

$$\tilde{D}^{(3)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \quad \text{если} \quad p_4^2 < (3m)^2. \quad (7.13.1)$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$D^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \quad \text{если} \quad p_4^2 < (3m)^2 \quad (7.13.2)$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} P_{\rho\rho'}P_{34}\tilde{D}^{(3)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \quad \text{если} \quad p_3^2 < (3m)^2, \\ P_{\rho\rho'}P_{34}\tilde{D}^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \quad \text{если} \quad p_3^2 < (3m)^2. \end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

Поэтому мы можем написать, что

$$\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4) = \sum_{a=1,2} (1 - P_{\rho\rho'} P_{34}) D^{(a)}(p_1, \ldots, p_4), \tag{7.15}$$

если

$$p_3^2 < (3m)^2 \quad \text{и} \quad p_4^2 < (3m)^2, \tag{7.16}$$

и нам остается исследовать аналитическую структуру только функций $D^{(1)}(p_1, \ldots, p_4)$ и $D^{(2)}(p_1, \ldots, p_4)$.

7.3. Эта задача требует более серьезного исследования, значительная часть которого относится скорее к теории функций многих комплексных переменных, чем к физике. Поэтому мы сформулируем здесь результаты чисто математической части рассуждений в виде теоремы, доказательство которой будет приведено в дополнении А.

Теорема. *Пусть будут даны четыре группы*

$$(i = r, a; \quad j = r, a)$$

трансляционно-инвариантных обобщенных функций

$$F_{ij}^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_4),$$

преобразующихся по линейным конечномерным представлениям группы Лоренца[1]) *и обладающих свойствами:*

$$\left.\begin{aligned}
&F_{rr}^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_4) = 0, \quad \textit{если} \quad x_1 \lesssim x_3 \quad \textit{или} \quad x_2 \lesssim x_4; \\
&F_{ra}^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_4) = 0, \quad \textit{если} \quad x_1 \lesssim x_3 \quad \textit{или} \quad x_4 \lesssim x_2; \\
&F_{ar}^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_4) = 0, \quad \textit{если} \quad x_3 \lesssim x_1 \quad \textit{или} \quad x_2 \lesssim x_4; \\
&F_{aa}^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_4) = 0, \quad \textit{если} \quad x_3 \lesssim x_1 \quad \textit{или} \quad x_4 \lesssim x_2.
\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Пусть, кроме того, данные функции удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{F}_{rj}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) - \tilde{F}_{aj}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \\
&\textit{если} \\
&p_1^2 < (M+m)^2 \quad \text{и} \quad p_3^2 < (3m)^2; \\
&\tilde{F}_{ir}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) - \tilde{F}_{ia}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \\
&\textit{если} \\
&p_2^2 < (M+m)^2 \quad \text{и} \quad p_4^2 < (3m)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

---

[1]) ν нумерует компоненты этого представления.

а также и требованию

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{F}_{ij}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \\ \text{если} \quad (p_1 + p_3)^2 < (M+m)^2 \quad \text{или} \quad p_1^0 + p_3^0 < 0.\end{array}\right\} \qquad (7.19)$$

Тогда можно построить обобщенные функции $\Phi_\omega(z_1, \ldots, z_5; z_6)$ *вещественной переменной* z_6, *являющиеся аналитическими функциями комплексных переменных* $z_1, \ldots, z_5$, *со свойствами:*

(*1*) *Функции* Φ_ω *регулярны в области*

$$\left.\begin{array}{l}|z_1 - M^2| < \rho m^2; \quad |z_2 - M^2| < \rho m^2; \\ |z_3 - \tau^*| < \rho m^2; \quad |z_4 - \tau^*| < \rho m^2; \\ -4\dfrac{M}{M+m} m^2 < \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0; \quad |\operatorname{Im} z_5| \leqslant \rho m^2 \dfrac{M^2}{z_6},\end{array}\right\} \qquad (7.20)$$

где ρ — *достаточно малое положительное число, а вещественное* τ^* *удовлетворяет неравенствам*

$$-V \leqslant \tau^* \leqslant m^2, \qquad (7.21)$$

где V — *некоторое положительное произвольное, но фиксированное число.*

(*2*) *Функции*

$$\Phi_\omega(z_1, \ldots, z_5; z_6) = 0, \quad \text{если} \quad z_6 < (M+m)^2. \qquad (7.22)$$

(*3*) *Для вещественных* $p_1, \ldots, p_4$, *таких, что*

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$$

и величины

$$\left.\begin{array}{l}z_1 = p_1^2; \quad z_2 = p_2^2; \quad z_3 = p_3^2; \quad z_4 = p_4^2; \\ z_5 = (p_1 + p_2)^2; \quad z_6 = (p_1 + p_3)^2\end{array}\right\} \qquad (7.20')$$

удовлетворяют неравенствам (7.20), *функции* $\tilde{F}_{ij}^{(\nu)}$ *можно представить в виде суммы*

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{F}_{ij}^{(\nu)}(p_1, \ldots, p_4) = \sum\limits_\omega p^{\alpha_1} \ldots p_{i_s}^{\alpha_s} \Phi_\omega\{z_1, \ldots, z_5; z_6\}, \\ \text{если} \quad p_1^0 + p_3^0 > 0\end{array}\right\} \qquad (7.23)$$

с конечным числом членов ($\omega = \{\alpha_i, \ldots, \alpha_s\}$).

Мы хотим применить эту теорему к нашим функциям $D^{(1,2)}$ и $P_{\rho\rho'}$ P_{34} $D^{(1,2)}$. Проверим, будут ли выполняться ее условия для функции $D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$.

Положим

$$F_{rr}(x_1, \ldots, x_4) = D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$$

и достроим в качестве функции F_{ra}, F_{ar} и F_{aa} выражения

$$\left.\begin{aligned} F_{ar}(x_1, \ldots, x_4) &= -\left\langle 0 \left| \frac{\delta\frown(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)} \cdot \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle; \\ F_{ra}(x_1, \ldots, x_4) &= \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\overline{\psi}(x_1)} \cdot \frac{\delta\overline{\frown}(x_2)}{\delta\varphi_\rho(x_4)} \right| 0 \right\rangle; \\ F_{aa}(x_1, \ldots, x_4) &= -\left\langle 0 \left| \frac{\delta\frown(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)} \cdot \frac{\delta\overline{\frown}(x_2)}{\delta\varphi_\rho(x_4)} \right| 0 \right\rangle, \end{aligned}\right\} \quad (7.24)$$

где фермиевские токи $\frown(x)$, $\overline{\frown}(x)$ определяются равенством (3.4). Ясно, что так построенные функции F_{ij} будут трансляционно-инвариантными и преобразуются, как произведения спиноров (мы не выписываем теперь явно верхнего индекса (ν), роль которого будут играть спинорные индексы полей (или токов) в точках x_1 и x_2). Очевидным образом (в силу условия причинности (2.24)) выполняются также и свойства (7.17).

Чтобы показать, что выполняются условия (7.18), заметим, что имеют место тождества:

$$\frac{\delta j_\rho(x_3)}{\delta\overline{\psi}(x_1)} + \frac{\delta\frown(x_1)}{\delta\varphi(x_3)} = i\,[\frown(x_1), j(x_3)]_-;$$

$$\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)} - \frac{\delta\overline{\frown}(x_2)}{\delta\varphi(x_4)} = i\,[j(x_4), \overline{\frown}(x_2)]_-,$$

справедливость которых легко проверить, исходя из определений (3.4). С их помощью мы получим, например, для первого из условий (7.18):

$$F_{rr}(x_1, \ldots, x_4) - F_{ar}(x_1, \ldots, x_4) =$$

$$= i\left\langle 0 \left| \frown(x_1) j_{\rho'}(x_3) \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle - i\left\langle 0 \left| j_\rho(x_3) \frown(x_1) \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\varphi(x_2)} \right| 0 \right\rangle.$$

Отделяя здесь в каждом члене первый множитель под знаком матричного элемента с помощью теоремы полноты и пользуясь трансляционной инвариантностью токов, найдем путем точно таких же рассуждений, как использованные выше ((7.12) — (7.13)), что фурье-образ первого члена обращается в нуль для

$$p_1^2 < (M+m)^2,$$

а фурье-образ второго — для

$$p_3^2 < (3m)^2.$$

Поэтому

$$\widetilde{F}_{rr}(p_1, \ldots, p_4) - \widetilde{F}_{ar}(p_1, \ldots, p_4) = 0,$$

если

$$p_1^2 < (M+m)^2 \quad \text{и} \quad p_3^2 < (3m)^2.$$

Совершенно аналогично проверяются и остальные условия этой группы.

Таким образом, выполнение условий (7.18) проверено. Нам осталось проверить выполнение требования (7.19).

Разложим для этого произведение (7.10.1) по полной системе функций

$$D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4) = \sum_n \int d\mathbf{k} \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta \bar{\psi}(x_1)} \right| n, \mathbf{k} \right\rangle \left\langle n, \mathbf{k} \left| \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta \psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle. \tag{7.25}$$

В силу трансляционной инвариантности для каждого из множителей под интегралом можно написать

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta \bar{\psi}(x_1)} \right| n, \mathbf{k} \right\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(0)}{\delta \bar{\psi}(x_1 - x_3)} \right| n, \mathbf{k} \right\rangle e^{-ik_n x_3} \tag{7.26.1}$$

и

$$\left\langle n, \mathbf{k} \left| \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta \psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle = \left\langle n, \mathbf{k} \left| \frac{\delta j_\rho(x_4 - x_2)}{\delta \psi(0)} \right| 0 \right\rangle e^{ik_n x_3}, \tag{7.26.2}$$

где

$$k_n^0 = +\sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2} > 0.$$

Далее, матричные элементы в (7.26) обратятся в нуль для безнуклонных состояний в силу закона сохранения ядерного заряда. Поэтому в сумму (7.25) могут войти только состояния с одним нуклоном, одним нуклоном и одним мезоном и т. д. Итак,

$$D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4) =$$
$$= \int d\mathbf{k}\, e^{ik_1(x_2-x_3)} \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(0)}{\delta\overline{\psi}(x_1-x_3)} \right| 1, \mathbf{k} \right\rangle \left\langle 1, \mathbf{k} \left| \frac{\delta j_\rho(x_4-x_2)}{\delta\psi(0)} \right| 0 \right\rangle +$$
$$+ \sum_{M_n \geqslant M+m} \int d\mathbf{k}\, e^{ik_n(x_2-x_3)} \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(0)}{\delta\overline{\psi}(x_1-x_3)} \right| n, \mathbf{k} \right\rangle \left\langle n, \mathbf{k} \left| \frac{\delta j_\rho(x_4-x_2)}{\delta\psi(0)} \right| 0 \right\rangle, \tag{7.27}$$

$$k_1^0 = +\sqrt{M^2+\mathbf{k}^2}; \qquad k_n^2 \geqslant (M+m)^2, \qquad k_n^0 > 0.$$

Таким образом, фуикция $D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$ представляется суперпозицией экспонент вида $e^{i\{q_1(x_1-x_3)+q_2(x_4-x_2)+k_n(x_2-x_3)\}}$, где $k_n^0 > 0$, а квадрат k_n^2 либо больше $(M+m)^2$ (второй член в (7.27)), либо равен M^2. Переходя к иашим обычным импульсам $p_1, \ldots, p_4$, выбранным в соответствии с (7.4), получим $k_n = p_1 + p_3$.

Следовательно, из-за наличия в (7.27) однонуклонного члена функция $D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$ непосредственно не удовлетворяет условиям теоремы; именно, из-за однонуклонного состояния не удается выполнить требование (7.19). Однако ясно, что однонуклонное состояние исключится, если мы умножим фурье-образ $\widetilde{D}(p_1, \ldots, p_4)$ на

$$[M^2 - (p_1 + p_3)^2]. \tag{7.28}$$

Ясно также, что выполнение остальных, проверенных выше, условий теоремы при этом не нарушится. В координатном представлении умножение на множитель (7.28) сведется к действию на $D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$ оператора

$$\left[M^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right].$$

Выполнение условия (7.19) для остальных функций (7.24) достигается совершенно аналогично.

Итак, мы установили, что функция

$$\left[M^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right] D^{(1)}(x_1, \ldots, x_4)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Следовательно, для импульсов $p_1, \ldots, p_4$, удовлетворяющих условиям (7.20′), (7.20) ее фурье-образ можно представить в виде:

$$[M^2-(p_1+p_3)^2]\tilde{D}^{(1)}(p_1, \ldots, p_4)= \\ =\begin{cases} =\sum p_{i_1}^{\alpha_1}\ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\Phi_\omega(p_1^2, \ldots; (p_1+p_3)^2), \\ \quad \text{если } (p_1+p_3)^2>(M+m)^2 \text{ и } p_i^0+p_3^0>0; \\ =0, \\ \quad \text{если } (p_1+p_3)^2<(M+m)^2 \text{ или } p_1^0+p_3^0<0 \end{cases} \tag{7.29}$$

(последнее равенство следует из выполнения (7.19)).

Переходя теперь к рассмотрению функции $D^{(2)}(x_1, \ldots, x_4)$, видим, что все рассуждения проводятся для нее совершенно аналогичным образом, происходит лишь одновременная замена переменных

$$1 \rightleftarrows 2 \quad \text{и} \quad 3 \rightleftarrows 4.$$

Поэтому для фурье-образа функции

$$\left[M^2+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right]D^{(2)}(x_1, \ldots, x_4)$$

имеет место (для импульсов, удовлетворяющих (7.20′), (7.20)) представление:

$$[M^2-(p_1+p_3)^2]\tilde{D}^{(2)}(p_1, \ldots, p_4)= \\ =\begin{cases} =\sum p_{i_1}^{\alpha_1}\ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\Phi_\omega(p_1^2, \ldots; (p_1+p_3)^2), \\ \quad \text{если } (p_1+p_3)^2>(M+m)^2 \text{ и } p_1^0+p_3^0<0; \\ =0, \\ \quad \text{если } (p_1+p_3)^2<(M+m)^2 \text{ или } p_1^0+p_3^0>0. \end{cases} \tag{7.30}$$

Точно таким же образом устанавливаем, что для двух других членов в (7.15) можем написать:

$$[M^2-(p_1+p_4)^2]P_{\rho\rho'}P_{34}\tilde{D}^{(1)}(p_1, \ldots, p_4)= \\ =\begin{cases} =\sum p_{i_1}^{\alpha_1}\ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\Phi_\omega(p_1^2, \ldots; (p_1+p_4)^2), \\ \quad \text{если } (p_1+p_4)^2>(M+m)^2 \text{ и } p_1^0+p_4^0>0; \\ =0, \\ \quad \text{если } (p_1+p_4)^2<(M+m)^2 \text{ или } p_1^0+p_4^0<0 \end{cases} \tag{7.31}$$

и

$$
\left.\begin{aligned}
&[M^2-(p_1+p_4)^2]\,P_{\rho\rho'}P_{34}\tilde{D}^{(2)}(p_1,\ \ldots,\ p_4)=\\
&=\begin{cases}
=\sum p_{i_1}^{\alpha_1}\ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\Phi_\omega\left(p_1^2,\ \ldots;\ (p_1+p_4)^2\right),\\
\qquad \text{если}\ (p_1+p_4)^2>(M+m)^2\ \text{ и }\ p_1^0+p_4^0<0;\\
=0,\\
\qquad \text{если}\ (p_1+p_4)^2<(M+m)^2\ \text{или}\ p_1^0+p_4^0>0.
\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(7.32)
$$

7.4. Подставим теперь для переменных $p_1,\ \ldots,\ p_4$ интересующие нас значения (7.6), где составляющие векторов $p',\ \ldots,\ -q$ в нашей специальной системе координат (6.11) задаются формулами (6.12), (6.13). Получим тогда:

$$
\left.\begin{aligned}
&p_1^2=p'^2=M^2;\quad p_2^2=p^2=M^2;\quad p_3^2=q'^2=\tau=\tau^*;\\
&p_4^2=q^2=\tau=\tau^*;\quad (p_1+p_2)^2=(p'-p)^2=-4\mathbf{p}^2;\\
&(p_1+p_3)^2=(p'+q')^2=\tau+2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2;\\
&p_1^0+p_3^0=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+E;\\
&(p_1+p_4)^2=(p'-q)^2=\tau-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2;\\
&p_1^0+p_4^0=p'^0-q^0=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E.
\end{aligned}\right\}(7.33)
$$

Остановимся сначала на фигурирующих в (7.29)—(7.32) неравенствах. Если подставить в них значения (7.33), то мы получим, вспоминая (6.31):

$$
\left.\begin{aligned}
&E\gtrless E_c(\tau) &&\text{вместо}\quad (p_1+p_3)^2\gtrless(M+m)^2,\\
&E\gtrless-\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} &&\text{вместо}\quad p_1^0+p_3^0\gtrless 0
\end{aligned}\right\}\quad(7.34)
$$

и

$$
\left.\begin{aligned}
&E\lessgtr-E_c(\tau) &&\text{вместо}\quad (p_1+p_4)^2\gtrless(M+m)^2,\\
&E\lessgtr\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} &&\text{вместо}\quad p_1^0+p_4^0\gtrless 0.
\end{aligned}\right\}\quad(7.35)
$$

Поскольку для $\mathbf{p}^2$, удовлетворяющих (6.33), $E_c(\tau)$ положительно, то из (7.34), (7.35) следует, что пары неравенств

$$(p_1+p_3)^2>(M+m)^2\quad \text{и}\quad p_1^0+p_3^0<0$$

или

$$(p_1+p_4)^2>(M+m)^2\quad \text{и}\quad p_1^0+p_4^0<0$$

не могут выполняться совместно. Поэтому функции $\tilde{D}^{(2)}(p_1, \ldots, p_4)$ и $P_{\rho\rho'}P_{34}\tilde{D}^{(2)}$ не дадут никакого вклада в полный фурье-образ $\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4)$ для интересующих нас значений импульсов.

Учитывая это обстоятельство и используя значения (7.33), приходим к следующему представлению для фурье-образа $\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4)$ функции $D(x_1, \ldots, x_4)$:

$$\tilde{D}(p_1, \ldots, p_4) = \frac{1}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}(\tau)+E} \times$$
$$\times \sum_{\omega} P_{\omega}\Phi_{\omega}\left(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \tau+2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}(\tau)-E} \times$$
$$\times \sum_{\omega} P'_{\omega}\Phi'_{\omega}\left(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \tau-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2\right), \tag{7.36}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\omega}(\ldots) &= 0 \quad \text{для} \quad E < E_c(\tau); \\ \Phi'_{\omega}(\ldots) &= 0 \quad \text{для} \quad E > -E_c(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

справедливому, если

$$-V \leqslant \tau < (1+\rho)m^2 \quad (\operatorname{Im}\tau = 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{p}^2 < \frac{M}{M+m}m^2, \tag{7.38}$$

где P_{ω} и P'_{ω} — полиномы относительно компонент импульсов, а Φ_{ω} и Φ'_{ω} — аналитические функции первых пяти аргументов, регулярные в области

$$\mathbf{p}^2 < \frac{M}{M+m}m^2; \quad -V \leqslant \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2; \quad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2, \tag{7.39}$$

и обобщенные функции шестого аргумента. Кроме того, надо помнить, что получая (7.36), мы делили (7.29) и (7.31) на $(E_{\mathbf{p}} \pm E)$. Поэтому представление (7.36) справедливо, конечно, только для

$$E \neq \pm E_{\mathbf{p}}(\tau). \tag{7.40}$$

Но при выполнении условия (7.40) функция $T(E, \tau)$ совпадает с $f(E, \tau)$ (ср. (6.35)). Следовательно, подставляя представление (7.36) в (7.7), мы получим не функцию $T_{\gamma\omega}(E, \tau)$, но функцию $f_{\gamma\omega}(E, \tau)$.

Поэтому, не выписывая в дальнейшем не интересующей нас зависимости от M^2 и $\mathbf{p}^2$ и обозначая[1])

$$\left.\begin{aligned} S\frac{-\frac{i}{2}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\sum\limits_{\omega}P_\omega\Phi_\omega(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \xi+M^2+2\mathbf{p}^2)\,u^{+S}(\mathbf{p})}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,(E_{\mathbf{p}}(\tau)+E)} &= \\ = F_1(\xi, \tau)&; \\ S\frac{-\frac{i}{2}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\sum\limits_{\omega}P'_\omega\Phi'_\omega(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \xi+M^2+2\mathbf{p}^2)\,u^{+S}(\mathbf{p})}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,(E_{\mathbf{p}}(\tau)-E)} &= \\ = F_2(\xi, \tau)&, \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

приходим к тому окончательному выводу, что

функция $Sf_{\gamma\omega}(E, \tau)$ может быть представлена, если выполняются условия (7.38), в виде

$$Sf_{\gamma\omega}(E, \tau) = F_1\left(2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau;\ \tau\right)+ \\ + F_2\left(-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau;\ \tau\right), \tag{7.42}$$

где $F_i(\xi; \tau)$ — аналитические функции переменной τ в области (7.39) и обобщенные функции вещественной переменной ξ, обладающие свойством

$$F_i(\xi, \tau) = 0 \quad \text{для} \quad \xi < 2Mm + m^2 - 2\mathbf{p}^2. \tag{7.43}$$

Тем самым представление (6.39), которым мы воспользовались в предыдущем параграфе для вывода дисперсионных соотношений, обосновано.

---

[1]) Операция симметризации понадобилась здесь потому, что полиномы P_ω, P'_ω могут содержать первую степень λ, неаналитически (ср. (6.18)) зависящую от τ.

§ 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Построенные нами в шестом параграфе дисперсионные соотношения (6.66) связывают функции $D(E)$ и $A(E)$, представляющие собой не скалярные функции, но «функциональные матрицы» в спиновом и изотопическом пространствах. Поэтому в этих соотношениях содержится связь между мнимыми и вещественными частями амплитуд для всех реально протекающих процессов рассеяния.

Однако удобнее, конечно, выделить эти амплитуды явно, с тем, чтобы написанные соотношения отвечали отдельным определенным физическим процессам. Заметим здесь, что, например, компоненты мезонного поля $\varphi_\rho(x)$, так как они были ранее введены,

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi^*}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_2 = \frac{\varphi - \varphi^*}{i\sqrt{2}}; \quad \varphi_3 = \varphi_0; \quad \rho = 1, 2, 3,$$

не описывают мезонов в определенном зарядовом состоянии. Между тем для интерпретации экспериментальных данных нам потребуются амплитуды, отвечающие непосредственно протекающим процессам.

8.1. Возможны 10 различных по зарядовой характеристике процессов (включая процессы с перезарядкой) рассеяния трех сортов мезонов π^+, π^0, π^- на двух нуклонах p и n. Кроме того, каждый из этих 10 процессов может протекать с переворачиванием спина нуклона (спин-флиповый процесс) или без переворачивания (не спин-флиповый процесс), так что число амплитуд еще удваивается. Выпишем все возможные процессы рассеяния π-мезонов на нуклонах, указав их очевидные изотопические характеристики:

Процесс	Проекция I_z	Полный изотопический спин I
I. $\pi^+ + p \to \pi^+ + p$	$^3/_2$	Чистое состояние с $I = {}^3/_2$
II. $\pi^0 + p \to \pi^0 + p$ III. $\pi^0 + p \to \pi^+ + n$ IV. $\pi^+ + n \to \pi^0 + p$ V. $\pi^+ + n \to \pi^+ + n$	$^1/_2$	Суперпозиция состояний с $I = {}^1/_2$ и $I = {}^3/_2$. Процессы идут по двум каналам: «упруго» и «с перезарядкой». Возможно одночастичное промежуточное состояние — протон
VI. $\pi^- + p \to \pi^- + p$ VII. $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ VIII. $\pi^0 + n \to \pi^- + p$ IX. $\pi^0 + n \to \pi^0 + n$	$-^1/_2$	То же, что и для II—V, но в промежуточном состоянии возможен не протон, а нейтрон
X. $\pi^- + n \to \pi^- + n$	$-^3/_2$	Чистое состояние с $I = {}^3/_2$

Если, однако, мы пренебрежем слабым, по сравнению с ядерным, электромагнитным взаимодействием[1]), то число действительно различных амплитуд сведется всего к четырем.

Действительно, вследствие зарядовой независимости ядерных сил мы можем приравнять амплитуды процессов I и X и соответственные амплитуды групп II—V и VI—IX, которые получаются друг из друга одновременной заменой:

$$\pi^+ \rightleftarrows \pi^-; \quad \pi^0 \rightleftarrows \pi^0 \quad \text{и} \quad p \rightleftarrows n.$$

Кроме того, амплитуды реакций III и IV и VII и VIII попарно связаны принципом детального равновесия.

Дальнейшее уменьшение числа линейно независимых амплитуд диктуется требованием общей инвариантности по отношению к вращениям в изотопическом пространстве.

---

[1]) Заметим, что мы пренебрегли электромагнитным взаимодействием раньше и весьма существенно, когда, рассматривая полную систему промежуточных состояний, мы не учитывали состояний, содержащих фотоны, ограничиваясь тем самым лишь сильными взаимодействиями.

8.2. При этом проще всего действовать следующим образом. Составляя изотопические функции системы мезон-нуклон путем перемножения исходных функций мезона и нуклона, мы получаем функции в шестимерном пространстве, являющемся прямым произведением изотопических пространств мезона и нуклона. Однако это представление известным образом распадается в прямую сумму неприводимых четырехрядного и двурядного представлений, отвечающих значениям полного изотопического спина $^3/_2$ и $^1/_2$. Инвариантность по отношению к вращениям в изотопическом пространстве будет теперь требовать, чтобы амплитуда рассеяния зависела лишь от значения полного изотопического спина. Поэтому амплитуды рассеяния всех перечисленных выше десяти процессов будут выражаться линейно через две независимые амплитуды, в качестве которых можно выбрать амплитуды рассеяния в состояниях с $I = {}^3/_2$ и $I = {}^1/_2$. Коэффициенты этих линейных комбинаций будут произведениями соответствующих коэффициентов Клебша — Жордана.

Очевидно, что для того, чтобы, наоборот, выразить амплитуды рассеяния в состояниях с $I = {}^3/_2$ и $I = {}^1/_2$,

$$T_{^3/_2} \quad \text{и} \quad T_{^1/_2},$$

через амплитуды физических реакций, достаточно также двух процессов. Возьмем в качестве таковых процессы I и IV,

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + p \ , —$$

единственные, сколько-нибудь подробно изученные экспериментально, — обозначив их амплитуды через

$$T_+ \quad \text{и} \quad T_-.$$

Поскольку процесс I сам по себе относится к чистому состоянию с $I = {}^3/_2$, то совершенно очевидно, что

$$T_+ = T_{^3/_2}. \tag{8.1}$$

Амплитуда же T_- представляет собой суперпозицию

$$T_- = \frac{2}{3} T_{^1/_2} + \frac{1}{3} T_{^3/_2}. \tag{8.2}$$

8.3. Чтобы установить изотопическую структуру матричного элемента $T^{\text{ret}}_{\alpha\omega}$, обратимся к соображениям инвариантности. В нашем распоряжении имеется два изотопических вектора, описывающих две частицы — нуклон и π-мезон; из них мы можем образовать единственный изотопический скаляр — их скалярное произведение. Второй скаляр — это единичная изотопическая матрица $\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}$. Любые другие комбинации этих векторов, например коммутаторы и степени, будут приводиться к тем же скалярам. Поэтому

$$T^{\text{ret}}_{\rho' t'; \rho t} = A\,\delta_{\rho'\rho}\,\delta_{t't} - (\boldsymbol{\omega\tau})_{\rho' t'; \rho t}\,B, \tag{8.3}$$

где A и B — уже изоскалярные амплитуды. В этой формуле $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\omega}$ означают матричные векторы изотопического спина нуклонов и мезонов соответственно; t, ρ — индексы изотопических состояний.

Чтобы связать A и B с определенными выше T_+ и T_-, вычислим собственные значения оператора $(\omega\tau)$. Для этого введем Ω — вектор полного изотопического спина; тогда

$$(\omega\tau) = \Omega^2 - \omega^2 - \left(\frac{1}{2}\tau\right)^2 =$$
$$= \Omega(\Omega+1) - 1(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \Omega(\Omega+1) - \frac{11}{4},$$

откуда видно, что собственные значения $(\omega\tau)$ равны: 1 в состоянии $|{}^3/_2\rangle$ и -2 в состоянии $|{}^1/_2\rangle$. Поэтому из (8.3) следует:

$$T_{3/2} = (A - B) \quad \text{и} \quad T_{1/2} = A + B. \tag{*}$$

Заметим, однако, что мы пока еще не позаботились так отнормировать амплитуды рассеяния, чтобы они были связаны с эффективными сечениями обычным соотношением (1.17). Оказывается, что для этого следует дополнить ранее определенные величины множителем $(2\pi^2)$. Поскольку мы переходим теперь к амплитудам для реальных процессов, то уместно именно сейчас совершить это переопределение, в соответствии с чем мы запишем вместо (*):

$$T_{3/2} = 2\pi^2(A - B) \quad \text{и} \quad T_{1/2} = 2\pi^2(A + 2B),$$

т. е.

$$A = (2\pi^2)^{-1}\frac{T_{1/2} + 2T_{3/2}}{3}; \qquad B = (2\pi^2)^{-1}\frac{T_{1/2} - T_{3/2}}{2}.$$

Отсюда, пользуясь формулами (8.1) и (8.2), устанавливаем, что

$$A = (2\pi^2)^{-1}\frac{T_+ + T_-}{2}; \qquad B = (2\pi^2)^{-1}\frac{T_- - T_+}{2}. \tag{8.4}$$

Легко показать, что вектор изотопического спина мезонов $\boldsymbol{\omega}$ можно записать, как

$$\omega^{\rho''}_{\rho\rho'} = ie_{\rho\rho'\rho''}.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau})_{\rho'\rho} = -ie_{\rho'\rho\rho''}\tau^{\rho''} = -\frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_{\rho}]_{-}, \tag{8.5}$$

что позволяет нам исключить вектор $\boldsymbol{\omega}$. С помощью (8.4), (8.5) и (8.3) находим:

$$T^{\text{ret}}_{\rho'\rho} = \frac{\delta_{\rho'\rho}}{4\pi^2}(T_+ + T_-) - \frac{1}{8\pi^2}[\tau_{\rho'}, \tau_{\rho}]_{-}(T_+ - T_-). \tag{8.6}$$

8.4. Нам осталось еще выделить зависимость от обычного спина нуклона, что мы сделаем, также исходя из соображений ковариантности. Очевидно, что T^{ret} может быть разбито на два члена — не зависящий от $\boldsymbol{\sigma}$ и содержащий $\boldsymbol{\sigma}$. Высших степеней $\boldsymbol{\sigma}$ быть не может в силу известных свойств вектора $\boldsymbol{\sigma}$. Чтобы получить скаляр, надо умножить $\boldsymbol{\sigma}$ на какой-либо аксиальный вектор, который строится из имеющихся векторов $\mathbf{p}$ и $\lambda\mathbf{e}$ единственным образом:

$$(\mathbf{p}\times\lambda\mathbf{e}) = (\mathbf{q}'\times\mathbf{q}).$$

Таким образом, мы приходим к зависимости вида

$$T^{\text{ret}}_{\alpha\omega} = \delta_{s's}T^{\text{ret}\,(0)}_{\rho'\rho} + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\lambda\mathbf{e})_{s's}T^{\text{ret}\,(1)}_{\rho'\rho}. \tag{8.7}$$

8.5. Объединяя результаты анализа строения амплитуды рассеяния в изотопическом и спиновом пространствах ((8.6) и (8.7)), мы найдем:

$$\begin{aligned} T^{\text{ret}}_{s't'\rho';\,st\rho} = {} & \frac{1}{4\pi^2}\delta_{s's}\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}\left(T^{(0)}_{+} + T^{(0)}_{-}\right) - \\ & -\frac{1}{8\pi^2}\delta_{s's}[\tau_{\rho'}, \tau_{\rho}]_{-t't}\left(T^{(0)}_{+} - T^{(0)}_{-}\right) + \\ & +\frac{1}{4\pi^2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\lambda\mathbf{e})_{s's}\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}\left(T^{(1)}_{+} + T^{(1)}_{-}\right) - \\ & -\frac{i}{8\pi^2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\lambda\mathbf{e})_{s's}[\tau_{\rho'}, \tau_{\rho}]_{-t't}\left(T^{(1)}_{+} - T^{(1)}_{-}\right). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Легко видеть, что каждый из четырех членов, суммой которых является T^{ret}, обладает разной симметрией по пространственному и изотопическому спину. А так как в дисперсионные соотношения (6.66) T^{ret} входит не непосредственно, а в симметризованных (антисимметризованных) по ρ, ρ' и по $\mathbf{e}$ комбинациях (заметим, что у выражения (8.8) симметрия по спину и по $\mathbf{e}$ совпадает), то в каждое из четырех соотношений (6.66) входит только *один* член из суммы (8.8). Именно:

$$\left.\begin{aligned}
(1+P_{\rho\rho'})\,\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}\,T^{\mathrm{ret}} &= 2\delta_{t't}\,\delta_{s's}\,\delta_{\rho'\rho}\,(2\pi^2)^{-1}\left(T_+^{(0)}+T_-^{(0)}\right);\\
(1-P_{\rho\rho'})\,\mathfrak{S}_{\mathbf{e}}\,T^{\mathrm{ret}} &= (2\pi^2)^{-1}\,[\tau_{\rho'},\,\tau_\rho]_{t't}\,\delta_{s's}\left(T_-^{(0)}-T_+^{(0)}\right);\\
(1+P_{\rho\rho'})\,\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}\,T^{\mathrm{ret}} &= \frac{i}{\pi^2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{pe})_{s's}\,\delta_{t't}\,\delta_{\rho'\rho}\left(T_+^{(1)}+T_-^{(1)}\right);\\
(1-P_{\rho\rho'})\,\mathfrak{A}_{\mathbf{e}}\,T^{\mathrm{ret}} &= \frac{i}{2\pi^2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{pe})_{s's}[\tau_{\rho'},\,\tau_\rho]_{-t't}\left(T_-^{(1)}-T_+^{(1)}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{8.9}$$

Для подстановки в дисперсионные соотношения нам надо отделить в (8.9) эрмитову и антиэрмитову части. Для этого достаточно разделить на эрмитову и антиэрмитову части $T_\pm^{(j)}$:

$$T_\pm^{(j)} = D_\pm^{(j)} + i\,A_\pm^{(j)}.$$

В самом деле, преобразование эрмитова сопряжения состоит у нас в выполнении комплексного сопряжения при одновременном проведении замены

$$\mathbf{p} \rightleftarrows \mathbf{p};\qquad \rho' \rightleftarrows \rho;\qquad s' \rightleftarrows s;\qquad t' \rightleftarrows t. \tag{8.10}$$

Легко видеть поэтому, что, во-первых, операции симметризации по ρ, ρ' и по $\mathbf{e}$ коммутируют с эрмитовым сопряжением, и, во-вторых, что все матричные множители в (8.9) переходят при эрмитовом сопряжении сами в себя.

8.6. Разделяя таким образом соотношения (8.9) на эрмитову и антиэрмитову части, подставляя их после этого в дисперсионные соотношения (6.66) и пользуясь результатами дополнения Б, мы придем к окончательному виду дисперсионных соотношений для заряженных мезонов:

$$D_+^{(0)}(E) + D_-^{(0)}(E) - D_+^{(0)}(E_0) - D_-^{(0)}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(E^2 - E_0^2\right) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \cdot \frac{E'\left(A_+^{(0)}(E') + A_-^{(0)}(E')\right)}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ 2g^2 \frac{M}{M^2 + \mathbf{p}^2} \frac{E_{\mathbf{p}}^2\left(E^2 - E_0^2\right)}{\left(E^2 - E_{\mathbf{p}}^2\right)\left(E_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2\right)}, \quad (8.11.1)$$

$$D_+^{(0)}(E) - D_-^{(0)}(E) - \frac{E}{E_0}\left(D_+^{(0)}(E_0) - D_-^{(0)}(E_0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} E\left(E^2 - E_0^2\right) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \frac{A_+^{(0)}(E') - A_-^{(0)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ 2g^2 \frac{M}{M^2 + \mathbf{p}^2} \frac{\left(E^2 - E_0^2\right) E E_{\mathbf{p}}}{\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E_0^2\right)}; \quad (8.11.2)$$

$$D_+^{(1)}(E) + D_-^{(1)}(E) - \frac{E}{E_0}\left(D_+^{(1)}(E_0) + D_-^{(1)}(E_0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} E\left(E^2 - E_0^2\right) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \frac{A_+^{(1)}(E') + A_-^{(1)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ 2 \frac{g^2}{M^2 + \mathbf{p}^2} \frac{E\left(E^2 - E_0^2\right)}{\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E_0^2\right)}; \quad (8.11.3)$$

$$D_+^{(1)}(E) - D_-^{(1)}(E) - D_+^{(1)}(E_0) + D_-^{(1)}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(E^2 - E_0^2\right) P \int\limits_{\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE' \frac{E'\left(A_+^{(1)}(E') - A_-^{(1)}(E')\right)}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ 2g^2 \frac{E_{\mathbf{p}}}{M^2 + \mathbf{p}^2} \frac{E^2 - E_0^2}{\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2 - E_0^2\right)}. \quad (8.11.4)$$

Следует обратить внимание на то, что в дисперсионные соотношения для заряженных мезонов входят каждый раз суммы или разности как мнимых, так и вещественных частей амплитуд рассеяния мезонов противоположных знаков заряда. Это явилось следствием симметризации, которую мы проделали ранее, чтобы избавиться от интегрирования по отрицательным энергиям — по существу дело состоит в том, что вместо амплитуд рассеяния, отвечающих отрицательным энергиям, с неизбежностью входят амплитуды рассеяния для античастиц.

Для рассеяния нейтральных мезонов, когда зарядовое сопряжение не приводит к впутыванию новых частиц, отмеченное обстоятельство не имеет, естественно, места и дисперсионные соотношения соответственно упрощаются. Положив в исходной общей формуле (8.7) $\rho=\rho'=3$, мы приходим, после простых выкладок, аналогичных предыдущим, к соотношениям для амплитуд рассеяния нейтральных мезонов:

$$D_0^{(0)}(E)-D_0^{(0)}(E_0)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(E^2-E_0^2\right)\ P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE'\frac{E'A_0^{(0)}(E')}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}+$$
$$+g^2\frac{ME_{\mathbf{p}}^2}{M^2+\mathbf{p}^2}\frac{\left(E^2-E_0^2\right)}{\left(E_{\mathbf{p}}^2-E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2-E_0^2\right)};\qquad(8.12.1)$$

$$D_0^{(1)}(E)-\frac{E}{E_0}D_0^{(1)}(E_0)=$$
$$=\frac{2}{\pi}E\left(E^2-E_0^2\right)\ P\int\limits_{\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}}^{\infty} dE'\frac{A_0^{(1)}(E')}{\left(E'^2-E^2\right)\left(E'^2-E_0^2\right)}+$$
$$+g^2\frac{1}{M^2+\mathbf{p}^2}\frac{E\left(E^2-E_0^2\right)}{\left(E_{\mathbf{p}}^2-E^2\right)\left(E_{\mathbf{p}}^2-E_0^2\right)}.\qquad(8.12.2)$$

Выпишем, наконец, еще и дисперсионные соотношения для случая рассеяния вперед на нулевой угол (в нашей системе координат мы достигнем этого, положив

$$\mathbf{p} = 0) \quad). \tag{8.13}$$

Для заряженных мезонов мы получим в этом случае:

$$D_{+}^{(0)}(E) + D_{-}^{(0)}(E) - D_{+}^{(0)}(E_0) - D_{-}^{(0)}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(E^2 - E_0^2) P \int_m^\infty dE' \frac{E'\left(A_{+}^{(0)}(E') + A_{-}^{(0)}(E')\right)}{(E'^2 - E^2)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{2g^2}{M}\left(\frac{m^2}{2M}\right)^2 \frac{E^2 - E_0^2}{\left[E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]\left[E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]}; \tag{8.14.1}$$

$$D_{+}^{(0)}(E) - D_{-}^{(0)}(E) - \frac{E}{E_0}\left\{D_{+}^{(0)}(E_0) - D_{-}^{(0)}(E_0)\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} E\left(E^2 - E_0^2\right) P \int_m^\infty dE' \frac{\left(A_{+}^{(0)}(E') - A_{-}^{(0)}(E')\right)}{(E'^2 + E^2)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{g^2 m^2}{M^2} \frac{E\left(E^2 - E_0^2\right)}{\left(E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right)\left(E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right)}; \tag{8.14.2}$$

$$D_{+}^{(1)}(E) + D_{-}^{(1)}(E) - \frac{E}{E_0}\left(D_{+}^{(1)}(E_0) + D_{-}^{(1)}(E_0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} E\left(E^2 - E_0^2\right) P \int_m^\infty dE' \frac{A_{+}^{(1)}(E') + A_{-}^{(1)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{2g^2}{M^2} \frac{E\left(E^2 - E_0^2\right)}{\left[E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]\left[E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]}; \tag{8.14.3}$$

$$D_{+}^{(1)}(E) - D_{-}^{(1)}(E) - D_{+}^{(1)}(E_0) + D_{-}^{(1)}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(E^2 - E_0^2\right) P \int_m^\infty dE' E' \frac{A_{+}^{(1)}(E') - A_{-}^{(1)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{2g^2}{M^2}\left(\frac{m^2}{2M}\right) \frac{E^2 - E_0^2}{\left[E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]\left[E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]}; \tag{8.14.4}$$

для нейтральных —

$$D_0^{(0)}(E) - D_0^{(0)}(E_0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(E^2 - E_0^2\right) P \int_m^\infty dE' \frac{E' A_0^{(0)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{g^2}{M}\left(\frac{m^2}{2M}\right)^2 \frac{E^2 - E_0^2}{\left[E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]\left[E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]}, \quad (8.15.1)$$

и

$$D_0^{(1)}(E) - \frac{E}{E_0} D_0^{(1)}(E) =$$

$$= \frac{2}{\pi} E\left(E^2 - E_0^2\right) P \int_m^\infty dE' \frac{A_0^{(1)}(E')}{\left(E'^2 - E^2\right)\left(E'^2 - E_0^2\right)} +$$

$$+ \frac{g^2}{M^2} \frac{E\left(E^2 - E_0^2\right)}{\left[E^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]\left[E_0^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2\right]}. \quad (8.15.2)$$

Дисперсионные соотношения в такой форме обладают двумя вполне конкретными преимуществами — в них отсутствует интегрирование по нефизической области энергий, меньших m (энергии покоя мезона) и, кроме того, по оптической теореме мнимая часть амплитуды рассеяния будет пропорциональна полному сечению, что чрезвычайно упрощает сравнение с опытом.

ДОПОЛНЕНИЕ А

ТЕОРЕМЫ ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ

Введем ряд определений. Будем говорить, что некоторая *функция* $h(x_1, \ldots, x_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q) = h(x; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q)$, непрерывная в $E_n \times \Omega_q$, где E_n — вещественное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а Ω_q — q-мерный тор, точки которого характеризуются угловыми переменными $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$, — *принадлежит классу* $C(r, s; n \mid \nu; \Omega_q)$, если все выражения вида

$$x_{\gamma_1} \ldots x_{\gamma_l} \frac{\partial^{p+\mu} h(x; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q)}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_p} \partial \vartheta_{\beta_1} \ldots \partial \vartheta_{\beta_\mu}},$$

$$0 \leqslant l \leqslant r; \quad 0 \leqslant p \leqslant s; \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \nu;$$

$$1 \leqslant (\alpha_i, \gamma_i) \leqslant n; \quad 1 \leqslant \beta_i \leqslant q$$

существуют и ограничены при всех

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n : \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q) \in E_n \times \Omega_q.$$

Если для такой функции h некоторые из показателей r, s, ν могут принимать сколь угодно большие значения, условимся в обозначении класса C ставить на соответствующих местах ∞. В случае, когда рассматриваемые функции не зависят от $x_1, \ldots, x_n$ или соответственно от $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$, будем говорить о классе $C(\nu; \Omega_q)$ или $C(r, s; n)$.

В классе $C(r, s; n)$ введем *норму* по формуле

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \\ 0 \leqslant l \leqslant r, \\ 0 \leqslant p \leqslant s}} \left| x_{\gamma_1} \ldots x_{\gamma_l} \frac{\partial^p h(x)}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_p}} \right|.$$

Этим самым $C(r, s; n)$ превращается в линейное нормированное пространство.

Линейные (ограниченные) функционалы $f(h)$ на пространствах $C(r, s; n)$, где r, s — любые неотрицательные числа, будем называть *обобщенными функциями, интегрируемыми на классе* $C(r, s; n)$, употребляя при этом обозначения

$$f(x), \quad \int f(x)\, h(x)\, dx.$$

Таким образом, если f — обобщенная функция, то всегда найдутся такие числа r и s, что f будет интегрируемой на классе $C(r, s; n)$. Обобщенные функции f_1 и f_2 будем называть равными, если найдутся такие достаточно большие r и s, что функционал $f_1 - f_2$ равен нулю на $C(r, s; n)$.

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ *слабо* (*в несобственном смысле*) *сходится к обобщенной функции* $f(x)$ *на классе* $C(r, s; n)$, если $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на классе $C(r, s; n)$ и для любого $h(x) \in C(r, s; n)$ имеет место:

$$\int f_n(x)\, h(x)\, dx \longrightarrow \int f(x)\, h(x)\, dx, \qquad n \to \infty.$$

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ *слабо* (*в несобственном смысле*) *сходится к обобщенной функции* $f(x)$, если найдутся такие достаточно большие числа r и s, что последовательность $f_n(x)$ будет слабо сходиться к $f(x)$ на классе $C(r, s; n)$.

Пусть G — открытое множество n-мерного эвклидова пространства E_n и Γ — его граница. Назовем границу Γ *регулярной*, если для любой точки $x \in \Gamma$ любая сфера с центром в точке x содержит другую сферу, не имеющую с G общих точек.

Будем говорить, что обобщенная функция $f(x)$ *равна нулю* в открытом множестве G с регулярной границей Γ, если существуют такие достаточно большие числа r и s, что

$$\int f(x)\, h(x)\, dx = 0$$

при всех $h(x)$ из $C(r, s; n)$, обращающихся в нуль в $E_n - G$.

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(k, t), \quad k = (k_1, \ldots, k_m), \quad t = (t_1, \ldots, t_n)$$

является *обобщенной функцией* (вещественных) *переменных* t, *интегрируемой на классе* $C(r, s; n)$, и *аналитической функцией комплексных переменных* k, *регулярной в области* D, если для любой функции $h(t)$ из класса $C(r, s; n)$ интеграл

$$\int f(k, t)\, h(t)\, dt$$

будет аналитической функцией k, регулярной в области D.

Если в подобной формулировке мы не будем специально упоминать об интегрируемости на некотором конкретном классе $C(r, s; n)$ и будем говорить просто об обобщенной функции, то мы тем самым условимся подразумевать, что такой класс имеется при соответствующих достаточно больших r и s.

Условимся об обозначениях при $n = 4$. Преобразование Фурье $\tilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ мы определим по формуле

$$\tilde{f}(p_0, \mathbf{p}) = \int f(x_0, \mathbf{x}) \exp i(x_0 p_0 - \mathbf{x}\mathbf{p})\, dx,$$

где, как и в дальнейшем, приняты обозначения[1]):

$$x = (x_0, \mathbf{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3);$$

$$xp = x_0 p_0 - \mathbf{x}\mathbf{p}, \quad \mathbf{x}\mathbf{p} = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha p_\alpha, \quad \mathbf{x}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2;$$

$$|\mathbf{k}| = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} |k_\alpha|^2\right)^{1/2}.$$

А.1. Лемма I. *Рассмотрим аналитическую функцию* $\Phi(k_0, \ldots, k_\alpha, \ldots)$ *четырех комплексных переменных* k_0, k_α $(\alpha = 1, 2, 3)$, *регулярную в области*:

$$|k_0| < \omega. \tag{А.1.1}$$

Пусть r_0, R *будут положительными числами, удовлетворяющими неравенству*:

$$r_0 < R < \omega. \tag{А.1.2}$$

1) Из соображений удобства письма мы будем помещать в этом дополнении все тензорные индексы *снизу*, а не сверху, как обычно.

Пусть, далее, r_α будут положительными числами и N — целым положительным. Тогда в области

$$|k_0| < r_0, \quad |k_\alpha| < r_\alpha \tag{A.1.3}$$

имеет место интегральное представление:

$$\Phi(k_0, \ldots, k_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi} \ldots \int \frac{\Phi(r_0 e^{i\theta_0}, \ldots, r_3 e^{i\theta_3})\, d\theta_0 \ldots d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod\limits_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)}. \tag{A.1.4}$$

Кроме того, здесь

$$\Phi(r_0 e^{i\theta}, \ldots, r_3^{i\theta_3}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} \frac{\Phi(Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3), \ldots)(1 - e^{2i\theta})^N}{\left(1 - \frac{r_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta)}\right)\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta, \tag{A.1.5}$$

где

$$u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3) = \frac{ia_\alpha}{2} R\left(1 - e^{2i\theta}\right) + b_\alpha,$$

$$a_\alpha = a_\alpha(\theta_0, \ldots, \theta_3) = \frac{2r_\alpha \sin\theta_\alpha}{R\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\cos 2\theta_0\right)},$$

$$b_\alpha = b_\alpha(\theta_0, \ldots, \theta_3) = r_\alpha \cos\theta_\alpha - \frac{a_\alpha}{2}\frac{r_0^2}{R}\sin 2\theta_0.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что благодаря неравенству (А.1.2) круги

$$|z_0| \leqslant r_0, \ldots, |z_\alpha| \leqslant r_\alpha$$

лежат целиком в области регулярности функции $\Phi(k_0, \ldots, k_3)$.

Мы можем поэтому применить в данном случае теорему Коши к каждой из четырех комплексных переменных $k_0, \ldots, k_3$, и тем самым установить справедливость соотношения (А.1.4).

Чтобы перейти к доказательству представления (А.1.5), рассмотрим аналитическую функцию одной комплексной переменной:

$$f(z)=\Phi\left(z, \ldots, \frac{ia_\eta R}{2}\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)+b_\alpha, \ldots\right)(R^2-z^2)^N. \quad (\text{A.1.6})$$

Так как функция эта регулярна в области

$$|z| \leqslant R < \omega,$$

мы можем воспользоваться теоремой Коши и написать:

$$f\left(r_0 e^{i\theta_0}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(Re^{i\theta}\right)}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\,d\theta. \quad (\text{A.1.7})$$

С другой стороны, на основании (A.1.6) имеем:

$$f\left(r_0 e^{i\theta_0}\right)=\Phi\left(r_0 e^{i\theta}, \ldots, r_\alpha e^{i\theta_\alpha}, \ldots\right)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N R^{2N},$$

$$f\left(Re^{i\theta}\right)=\Phi\left(Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3), \ldots\right)\left(1-e^{2i\theta}\right)^N R^{2N}.$$

Подставив эти выражения в обе части равенства (A.1.7), мы и приходим к доказываемому представлению (A.1.5).

A.2. Лемма II. *Предположим, что функции $a_\alpha(\theta_0, \ldots, \theta_3)$, введенные в предыдущем пункте* A. 1, *удовлетворяют неравенству*:

$$|\mathbf{a}| \leqslant 1-\sigma, \quad (\text{A.2.1})$$

где σ — некоторое положительное число.

Тогда, если $\varphi(t)$, $g(t)$ будут функциями из класса $C(0, \infty; 1)$ *такими, что*

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi(t)=0,\ t\leqslant-\delta; & g(t)=0,\ t\leqslant-\delta, \\ \varphi(t)=1,\ t\geqslant 0; & g(t)=1,\ t\geqslant 0,\end{array}\right\} \quad (\text{A.2.2})$$

то выражение

$$\varphi(x_0)\, g\left(x_0^2-\mathbf{x}^2\right)\int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\left(1-e^{2i\theta}\right)^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}\times$$

$$\times \exp i\left\{x_0 Re^{i\theta}-\mathbf{x}\mathbf{u}(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3)\right\}, \quad (\text{A.2.3})$$

рассматриваемое как функция $f(x_0, \ldots, x_3; \theta_0, \ldots, \theta_3)$, *принадлежит к любому классу* $C(r, s; 4|\nu; \Omega_4)$, *для которого*

$$r + s + \nu \leqslant N + 1. \tag{A.2.4}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$i\left\{x_0 R e^{i\theta} - \mathbf{x}\mathbf{u}(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3)\right\} = -x_0 R \sin\theta + \mathbf{x}\mathbf{a} R \sin^2\theta + \\ + i x_0 R \cos\theta - i\mathbf{x}\left(\frac{\mathbf{a}}{2} R \sin 2\theta + \mathbf{b}\right),$$

$$\frac{1 - e^{2i\theta}}{2} = \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta).$$

Заметим, далее, что функции

$$\frac{(\sin\theta - i\cos\theta)^N}{\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0}\right)^N \left(1 - \frac{r_0}{R} e^{i(\theta_1 - \theta)}\right)}; \quad \frac{\mathbf{a}}{2} R \sin 2\theta + \mathbf{b}$$

принадлежат соответственно к классам $C(\infty; \Omega_2)$ и $C(\infty; \Omega_5)$. Поэтому только что сформулированная лемма будет доказана, если мы сможем установить следующее, более общее утверждение:

Если

$$f(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3) \in C(\infty; \Omega_5),$$
$$\mathbf{A}(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3) \in C(\infty; \Omega_5)$$

и если значения A_α *вещественны, то функция*

$$F = \varphi(x_0)\, g\left(x_0^2 - \mathbf{x}^2\right) \int_0^\pi d\theta \sin^N\theta\, f(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3) \times \\ \times \exp\left\{-x_0 R \sin\theta + \mathbf{x}\mathbf{a} R \sin^2\theta + i x_0 R \cos\theta - i\mathbf{x}\mathbf{A}\right\} \tag{A.2.5}$$

принадлежит к классу

$$C(r, s; 4|\nu; \Omega_4), \quad \text{где} \quad r + s + \nu \leqslant N + 1.$$

Это утверждение мы и будем сейчас доказывать. Ясно, прежде всего, что выражение (A.2.5) благодаря условию (A.2.2) может быть отлично от нуля лишь в области, в которой

$$x_0 \geqslant -\delta, \quad \mathbf{x}^2 < x_0^2 + \delta. \tag{A.2.6}$$

Заметим, далее, что

$$\frac{\partial^{r+\mu}F}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_r}\partial\theta_{\beta_1}\ldots\partial\theta_{\beta_\mu}}$$

может быть представлена в виде конечной суммы выражений типа

$$\varphi_\lambda(x_0,\ldots,x_3)P_\lambda(x_0,\ldots,x_3)\int_0^\pi d\theta\sin^N\theta\, f_\lambda(\theta,\ldots,\theta_3)\times$$

$$\times\exp\{-x_0R\sin\theta+\mathrm{xa}R\sin^2\theta+ix_0R\cos\theta-i\mathrm{xA}\},$$

в которых

$$\begin{matrix}\varphi_\lambda\in C(0,0;\ 4); \\ f_\lambda\in C(\infty;\ \mathfrak{Q}_5)\end{matrix}\quad \varphi_\lambda=0 \quad \text{вне области (2.6)},$$

и $P_\lambda(x_0,\ldots,x_3)$ — полиномы степени, не большей чем $r+\mu$.

Имеем, наконец,

$$\left|\int_0^\pi d\theta\sin^N\theta\, f_\lambda\exp\{-x_0R\sin\theta+\mathrm{xa}R\sin^2\theta+ix_0R\cos\theta-\right.$$

$$\left.-i\mathrm{xA}\}\right|\leqslant\max_{(0\leqslant\theta\leqslant\pi)}\left|f_\lambda(\theta,\theta_0,\ldots,\theta_3)\right|\times$$

$$\times\int_0^\pi d\theta\sin^N\theta\exp\{-x_0R\sin\theta+\mathrm{xa}R\sin^2\theta\}.$$

Ввиду всего сказанного убеждаемся, что наше доказательство будет закончено, как только мы покажем, что в области (А.2.6) для достаточно больших x_0 имеет место неравенство:

$$\int_0^\pi e^{-R(x_0\sin\theta-\mathrm{xa}\sin^2\theta)}\sin^N\theta\,d\theta\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|x_0|^{N+1}}.$$

К установлению этого неравенства мы сейчас и перейдем. Примем во внимание, что в рассматриваемой области

$$x_0\sin\theta-\mathrm{ax}\sin^2\theta\geqslant x_0\sin\theta-|\mathrm{a}|\sqrt{x_0^2+\delta}\sin^2\theta$$

и потому на основании (А.2.1),

$$x_0\sin\theta-\mathrm{ax}\sin^2\theta\geqslant x_0\sin\theta-(1-\sigma)\sqrt{x_0^2+\delta}\sin^2\theta.$$

Возьмем положительное X так, чтобы

$$(1-\sigma)\sqrt{X^2+\delta}=\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)X$$

и будем рассматривать $x_0 \geqslant X$. Тогда

$$x_0 \sin\theta - \mathbf{a}\mathbf{x}\sin^2\theta \geqslant \frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta,$$

откуда

$$\int_0^{\pi} e^{-R(x_0\sin\theta - \mathbf{x}\mathbf{a}\sin^2\theta)}\sin^N\theta\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta\,d\theta < \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta\cos\theta\,d\theta +$$

$$+\frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta\,(-\cos\theta)\,d\theta =$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0 t}\,t^N\,dt+\frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}} < 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{R\sigma x_0}\right)^{N+1}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} e^{-t}t^N\,dt+\frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}}$$

и наше доказательство закончено.

А.3. Мы перейдем теперь к приложению лемм I и II. Рассмотрим две обобщенные функции $F_r(x)$, $F_a(x)$ ($x=(x_0, \mathbf{x})$), из которых одна будет запаздывающей, а другая опережающей:

$$\left.\begin{aligned} F_r(x)&=0, \quad x\leqslant 0;\\ F_a(x)&=0, \quad x\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{А.3.1}$$

Построим их «сглаженные фурье-образы»:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{F}_r(k,\varepsilon)&=\int F_r(x)\exp\{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)+i(k_0x_0-\mathbf{k}\mathbf{x})\}\,dx,\\ \tilde{F}_a(k,\varepsilon)&=\int F_a(x)\exp\{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)+i(k_0x_0-\mathbf{k}\mathbf{x})\}\,dx\end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon>0, \tag{А.3.2}$$

и заметим, что они являются аналитическими функциями комплексных переменных $k(k_0, k_1, \ldots, k_3)$, не имеющими особенностей на конечном расстоянии.

Введем в рассмотрение функцию $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ тех же комплексных переменных, положив:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}(k, \varepsilon) &= \tilde{F}_r(k, \varepsilon) - T(k, \varepsilon), \quad \operatorname{Im} k_0 > 0; \\ \tilde{F}(k, \varepsilon) &= \tilde{F}_a(k, \varepsilon) - T(k, \varepsilon), \quad \operatorname{Im} k_0 < 0, \end{aligned}\right\} \tag{A.3.3}$$

где

$$T(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\tilde{F}_r(t, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(t, \mathbf{k}, \varepsilon)}{t - k_0} dt \tag{A.3.4}$$

и где ω — некоторое положительное число.

Видим отсюда, что $\tilde{F}(k, \varepsilon)$, $T(k, \varepsilon)$ не имеют на конечном расстоянии других особенностей, кроме «линии разреза»:

$$\operatorname{Im} k_0 = 0.$$

Возьмем k_0 на этой линии. Получим:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) &- \tilde{F}(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) = \\ &= F_r(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \{T(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \\ &\qquad - T(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Но в случае, когда $-\omega < k_0 < \omega$, можем написать:

$$\begin{aligned} T(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) &- T(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} &\{\tilde{F}_r(t, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(t, -\mathbf{k}, \varepsilon)\} \left\{ \frac{1}{t - k_0 - i0} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{t - k_0 + i0} \right\} dt = \tilde{F}_r(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{F}(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) = 0 \qquad -\omega < k_0 < \omega. \tag{A.3.5}$$

Видим отсюда, что аналитическая функция $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ является регулярной в области

$$|k_0| < \omega \tag{A.3.6}$$

(не имеет в ней особенностей на конечном расстоянии) и потому мы можем применить к ней лемму I.

Таким образом, приходим к интегральному представлению:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{F}(k, \varepsilon) = \\ = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^4 \displaystyle\int_0^{2\pi} \cdots \int \dfrac{\Phi_1(\theta_0, \ldots, \theta_3; \varepsilon) - \Phi_2(\theta_0, \ldots, \theta_3; \varepsilon)}{\left(1 - \dfrac{k_0}{r_0} e^{-i\theta}\right) \prod\limits_\alpha \left(1 - \dfrac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)} d\theta_0 \ldots d\theta_3 \\ \qquad |k_0| < r_0, \ |k_\alpha| < r_\alpha, \end{array}\right\} \tag{A.3.7}$$

в котором

$$\Phi_1(\theta_0, \ldots, \theta_3; \varepsilon) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{F_r\{Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3), \ldots; \varepsilon\}}{1 - \dfrac{r_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta)}} \frac{(1 - e^{2i\theta})^N}{\left(1 - \dfrac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta}\right)^N} d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{\tilde{F}_a\{Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \vartheta_0, \ldots, \theta_3), \ldots; \varepsilon\}}{1 - \left(\dfrac{r_0}{R}\right) e^{i(\theta_0 - \theta)}} \frac{(1 - e^{2i\theta})^N}{\left(1 - \left(\dfrac{r_0^2}{R^2}\right) e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta, \tag{A.3.8}$$

$$\Phi_2(\theta_0, \ldots, \theta_3; \varepsilon) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T\{Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3), \ldots; \varepsilon)\}}{\left(1 - \dfrac{r_0}{R}\right) e^{i(\theta_0 - \theta)}} \frac{(1 - e^{2i\theta})^N}{\left(1 - \dfrac{r_0^2}{R} e^{2i\theta}\right)^N} d\theta. \tag{A.3.9}$$

Чтобы воспользоваться леммой II, необходимо обеспечить выполнение неравенства (А.2.1). Потребуем для этого, чтобы входящие здесь r_α удовлетворяли неравенству

$$\frac{2|\mathbf{r}|}{R\left(1 - \dfrac{r_0^2}{R^2}\right)} < 1. \tag{A.3.10}$$

Тогда, действительно, как можно усмотреть из (А.1.6), требование (А.2.1) выполняется, например, при

$$\sigma = 1 - \frac{2\,|\mathbf{r}|}{R\left(1 - \dfrac{r_0^2}{R^2}\right)}.$$

Займемся прежде всего первым слагаемым в правой части (А.3.8). Подставив в него (А.3.2), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\widetilde{F}_r\{Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0 \ldots, \theta_3), \ldots; \varepsilon\}}{1 - \dfrac{r_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta)}} \, \frac{(1 - e^{2i\theta})^N}{\left(1 - \dfrac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0}\right)^N} \, d\theta &= \\ = \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2 + \mathbf{x}^2\right)} I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx&, \\ I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3) = \int\limits_0^{\pi} d\theta \, \frac{(1 - e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 R e^{i\theta} - \mathbf{x}\mathbf{u}\}}{\left(1 - \dfrac{r_0}{R^2} e^{2i\theta_0}\right)^N \left(1 - \dfrac{r_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta)}\right)}&. \end{aligned}\right\} \tag{А.3.11}$$

Заметим теперь, что функции

$$e^{-\varepsilon\left(x_0^2 + \mathbf{x}^2\right)} I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3),$$

$$\varphi(x_0)\, g(x_0^2 - \mathbf{x}^2)\, I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2 + \mathbf{x}^2\right)},$$

благодаря наличию режущего экспоненциального фактора, принадлежат к классу $C(\infty, \infty; 4\,|\,\infty; \Omega_4)$. С другой стороны, их разность равна нулю, если

$$x_0 \geqslant 0, \quad x_0^2 - \mathbf{x}^2 \geqslant 0.$$

Но в области, где $x_0 < 0$ или $x_0^2 - \mathbf{x}^2 < 0$, обращается в нуль сама функция $F_r(x)$ (см. (А.3.1)).

Имеем, таким образом,

$$\int F_r(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2 + \mathbf{x}^2\right)} I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx =$$

$$= \int F_r(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2 + \mathbf{x}^2\right)} \varphi(x_0)\, g(x_0^2 - \mathbf{x}^2)\, I(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3).$$

Следовательно, выражение (А.3.11) равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int F_r(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2+\mathrm{x}^2\right)} h_+(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx,$$

где

$$h_+(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3) = \\ = \varphi(x_0)\, g(x_0^2 - \mathrm{x}^2) \int\limits_0^{\pi} d\theta\, \frac{(1-e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 R e^{i\theta} - \mathrm{xu}\}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N \left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}. \tag{А.3.12}$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что второе слагаемое в правой части соотношения (А.3.8) равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int F_a(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2+\mathrm{x}^2\right)} h_-(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx,$$

причем

$$h_-(x;\ \theta_0, \ldots, \theta_3) = \\ = \varphi(-x_0)\, g(x_0^2 - \mathrm{x}^2) \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\theta\, \frac{(1-e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 R e^{i\theta} - \mathrm{xu}\}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N \left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}. \tag{А.3.13}$$

Фиксируем теперь сколь угодно высокие показатели r, s, ν и возьмем теперь $N = r + s + \nu - 1$. Тогда в соответствии с леммой II мы можем утверждать, что обе функции h_+ и h_- принадлежат к классу $C(r,\ s;\ 4\,|\,\nu;\ \Omega_4)$.

Итак, указанным способом мы можем построить в классе $C(r,\ s;\ 4\,|\,\nu;\ \Omega_4)$ с любыми сколь угодно высокими показателями такие две функции h_+ и h_-, что:

$$\Phi_1(\theta_0, \ldots, \theta_3;\ \varepsilon) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2+\mathrm{x}^2\right)} h_+(x,\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx + \\ + \frac{1}{2\pi}\int F_a(x)\, e^{-\varepsilon\left(x_0^2+\mathrm{x}^2\right)} h_-(x,\ \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx. \tag{А.3.14}$$

Функции h_+, h_- мы будем называть универсальными в том смысле, что они зависят лишь от показателей r, s, ν, а не от вида функций $F_r(x)$, $F_a(x)$.

А.4. Для того чтобы провести предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в соотношении (А.3.7), сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма III. *Рассмотрим некоторую обобщенную функцию $f(x)$ и предположим, что существует такое положительное η, что*

$$\int f(x) e^{ipx} dx = 0 \qquad (\text{А.4.1})$$

в области

$$p_0^2 + \mathbf{p}^2 < \eta^2. \qquad (\text{А.4.2})$$

Фиксируем положительные R, ω, δ, удовлетворяющие неравенствам

$$R^2 + \delta^2 < \omega^2 + \delta^2 < \frac{\eta^2}{2}, \qquad (\text{А.4.3})$$

и построим функцию комплексных переменных $k = (k_0, \mathbf{k}) = (k_0, k_1, \ldots, k_3)$:

$$T(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\tilde{f}(t, \mathbf{k}; \varepsilon)}{t - k_0} dt, \qquad (\text{А.4.4})$$

где

$$\tilde{f}(k; \varepsilon) = \int f(x) \exp\{-\varepsilon(x_0^2 + \mathbf{x}^2) + ikx\} dx. \qquad (\text{А.4.5})$$

Тогда можем утверждать, что

$$\left.\begin{matrix} T(k, \varepsilon) \to 0 \\ \varepsilon \to +0 \end{matrix}\right\} \qquad (\text{А.4.6})$$

равномерно в замкнутой области комплексных переменных:

$$|k_0| \leqslant R, \qquad |\mathbf{k}| \leqslant \delta. \qquad (\text{А.4.7})$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (А.4.5) и подставим в него фурье-представление:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \tilde{f}(p) e^{-ipx} dp;$$

получим

$$\tilde{f}(k, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tilde{f}(p)\left\{\int \exp\left[-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)+i(k-p)x\right]dx\right\}dp =$$
$$= \frac{1}{2^4\pi^2\varepsilon^2}\int \tilde{f}(p)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}dp. \quad (\text{A}.4.8)$$

Фиксируем теперь положительное $\bar{\eta}$ так, чтобы

$$\omega^2+\delta^2 < \frac{\bar{\eta}^2}{2} < \frac{\eta^2}{2} \qquad (\text{A}.4.9)$$

и построим в классе $C(0, \infty;\ 1)$ функцию $v(t)$, для которой

$$U(t) = 1, \quad t \geqslant \eta^2,$$
$$U(t) = 0, \quad t \leqslant \bar{\eta}^2.$$

Заметим, что функции (k фиксировано)

$$\exp\left\{-\frac{(\mathbf{k}_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\},$$
$$U(p_0^2+\mathbf{p}^2)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}$$

принадлежат к классу $C(\infty, \infty;\ 4)$. Разность их равна нулю при

$$p_0^2+\mathbf{p}^2 \geqslant \eta^2.$$

С другой стороны, по условию леммы, функция $f(p)$ равна нулю, когда

$$p_0^2+\mathbf{p}^2 < \eta^2.$$

Видим, следовательно, что соотношение (А.4.8.) может быть представлено в форме:

$$\tilde{f}(k, \varepsilon) = \int \tilde{f}(p)\,H_k(p, \varepsilon)\,dp, \qquad (\text{A}.4.10)$$

$$H_k(p, \varepsilon) = \frac{1}{2^4\pi^2\varepsilon^2}\,U(p_0^2+\mathbf{p}^2)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}. \qquad (\text{A}.4.11)$$

Будем проводить дальнейшие рассуждения, фиксировав k произвольным образом в замкнутой области:

$$|k_0| \leqslant \omega, \qquad \mathbf{k} \leqslant \delta. \qquad (\text{A}.4.12)$$

Проанализируем теперь характер стремления к нулю последовательности $H_k(p, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$.

Так как, по определению U,

$$U(p_0^2+\mathbf{p}^2)=0, \quad \text{при} \quad p_0^2+\mathbf{p}^2 \leqslant \bar{\eta}^2, \tag{A.4.13}$$

то мы можем ограничиться областью

$$p_0^2+\mathbf{p}^2 > \bar{\eta}^2. \tag{A.4.14}$$

Имеем здесь:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} &= \\
&=(p_0-\operatorname{Re}k_0)^2+(\mathbf{p}-\operatorname{Re}\mathbf{k})^2-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}\mathbf{k})^2= \\
&= p_0^2+\mathbf{p}^2+(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2-2\,p_0\operatorname{Re}k_0- \\
&\qquad -2\mathbf{p}\operatorname{Re}\mathbf{k}-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}k)^2.
\end{aligned}$$

Но

$$p_0\operatorname{Re}k_0+\mathbf{p}\operatorname{Re}\mathbf{k} \leqslant \sqrt{p_0^2+\mathbf{p}^2}\,\sqrt{(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2}$$

и потому

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} \geqslant \\
&\geqslant 2\left\{\frac{\sqrt{p_0^2+\mathbf{p}^2}}{2}-\sqrt{(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2}\right\}^2-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}\mathbf{k})^2- \\
&\quad -(\operatorname{Re}k_0)^2-(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2+\frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2} \geqslant \frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2}-(|k_0|^2+|\mathbf{k}|^2).
\end{aligned}$$

Поэтому ввиду (А.4.9), (А.4.12), (А.4.14)

$$\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} > \zeta^2+\frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2}-\frac{\eta^2}{2},$$

где

$$\zeta^2=\frac{\bar{\eta}^2}{2}-(\omega^2+\delta^2).$$

Таким образом,

$$\left|\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}\right| < e^{-\frac{\zeta^2}{4\varepsilon}-\frac{1}{8\varepsilon}\left(p_0^2+\mathbf{p}^2-\bar{\eta}^2\right)}. \tag{A.4.15}$$

Отсюда следует, благодаря (А.4.11), что

$$(p_0^2+\mathbf{p}^2)^s H_k(p,\ \varepsilon) \underset{\varepsilon \to +0}{\to} 0 \tag{А.4.16}$$

равномерно для всех p и всех k из (А.4.12), при любом сколь угодно большом значении s.

Более того, поскольку при дифференцировании режущая экспонента остается неизменной и может лишь умножаться на полиномиальные выражения, имеем также равномерно для всех частных производных:

$$(p_0^2+\mathbf{p}^2)^s \frac{\partial^{\nu+\mu} H_k(p,\ \varepsilon)}{\partial k_{\alpha_1}\ldots\partial k_{\alpha_\nu}\,\partial p_{\beta_1}\ldots\partial p_{\beta_\mu}} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0\,. \tag{А.4.17}$$

Приняв во внимание (А.4.10), видим отсюда, что *при* $\varepsilon\to+0$ $\tilde f(\boldsymbol{k},\ \varepsilon)$ *стремится к нулю со всеми своими частными производными по* $k_0, \ldots, k_3$ *равномерно в области* (А.4.12).

Воспользуемся теперь этим результатом для исследования выражения (А.4.4).

Имеем:

$$T(\boldsymbol{k},\ \varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\tilde f(t,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)-\tilde f(k_0,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)}{t-k_0}\,dt + {}$$
$$+\tilde f(k_0,\ \mathbf{k};\ \varepsilon)\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0},$$

откуда

$$|T(\boldsymbol{k},\varepsilon)| < \frac{\omega}{\pi}\max_{|t|\leqslant\omega}\left|\frac{\tilde f(t,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)-\tilde f(k_0,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)}{t-k_0}\right| + {}$$
$$+\left|\tilde f(k_0,\ \mathbf{k};\ \varepsilon)\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}\right|.$$

Но на основании только что полученного результата

$$\max_{|t|\leqslant\omega}\left|\frac{\tilde f(t,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)-\tilde f(k_0,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)}{t-k_0}\right| \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0, \quad \left|\tilde f(k_0,\ \mathbf{k},\ \varepsilon)\right| \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0$$

равномерно в области (A.4.12). С другой стороны, если

$$|k_0| \leqslant R < \omega,$$

то интеграл

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{dt}{t - k_0} \right| < \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\omega + R}{\omega - R} \right) + \frac{1}{2}$$

является ограниченным.

Таким образом, в области (A.4.7) имеем в смысле равномерной сходимости

$$T(k,\ \varepsilon) \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} 0$$

и наша лемма доказана.

A.5. Рассмотрим теперь вопрос о предельном переходе $\varepsilon \to 0$ в интегральном представлении (A.3.7), (A.3.8), (A.3.9), (A.3.14).

Сделаем сейчас основное допущение о том, что

$$\tilde{F}_r(p) - \tilde{F}_a(p) = 0 \tag{A.5.1}$$

для

$$p_0^2 + \mathbf{p}^2 < \eta^2. \tag{A.5.2}$$

Тогда, чтобы воспользоваться леммой III, нам надо обеспечить выполнение неравенств (A.4.3) и (A.4.7) аргументами k, входящими в выражение T, фигурирующее в правой части интегрального представления (A.3.9). Иначе говоря, мы должны гарантировать, что

$$R^2 + \mathbf{r}^2 < \frac{\eta^2}{2}, \quad R^2 + \mathbf{u}^2 < \frac{\eta^2}{2}. \tag{A.5.3}$$

Кроме того, для применимости леммы II нам следует также принять во внимание еще неравенство

$$\frac{2|\mathbf{r}|}{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} < R. \tag{A.5.4}$$

Но, как это следует из (А.1.6):

$$|u_\alpha| < |a_\alpha| R + |b_\alpha| <$$
$$< |a_\alpha| R\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right) + r_\alpha |\cos\theta_\alpha| <$$
$$< \frac{2r_\alpha}{1-\frac{r_0^2}{R^2}} |\sin\theta_\alpha| \left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right) + r_\alpha\, |\cos\theta_\alpha|,$$

откуда

$$\mathbf{u}^2 < \mathbf{r}^2 \left\{ 4\left(\frac{1+\frac{r_0^2}{2R^2}}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}\right)^2 + 1 \right\}.$$

Видим, следовательно, что все требуемые условия (А.5.3) (А.5.4) будут удовлетворены, если выбрать r_0, r_α, R так чтобы

$$2|\mathbf{r}| < R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right), \quad R^2 + R^2\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right)^2 + \mathbf{r}^2 < \frac{\eta^2}{2}. \qquad (\text{А.5.5})$$

Этот выбор мы и примем для дальнейшего.

Возвратимся теперь к рассмотрению выражения (А.3.9) и заметим, что на основании леммы III имеем равномерно на торе Ω_5:

$$T\{Re^{i\theta}, \ldots, u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots, \theta_3), \ldots; \varepsilon\} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0.$$

Поэтому, также в смысле равномерной сходимости:

$$\Phi_2(\theta_0, \ldots, \theta_3;\ \varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0. \qquad (\text{А.5.6})$$

Обратимся теперь к формуле (А.3.14). Пусть обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ интегрируемы на классе $C(r, s; 4)$. Возьмем $N \geqslant r+s+\nu-1$. По лемме II h_+ и h_- принадлежат классу $C(r, s; 4)$. Тогда, переходя к пределу, получим, в смысле равномерной сходимости

$$\Phi_1(\theta_0, \ldots, \theta_3; \varepsilon) \to \frac{1}{2\pi} \int F_r(x) h_+(x, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx + \\ + \frac{1}{2\pi} \int F_a(x) h_-(x, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx. \qquad (A.5.7)$$

Приняв во внимание интегральное представление (А.3.7) и полученные предельные соотношения (А.5.6), (А.5.7), убеждаемся, что в любой замкнутой области, содержащейся в рассматриваемой области (А.1.3) комплексных переменных, функции $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ равномерно сходятся к пределу:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}(k) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi} \cdots \int \frac{\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_3)\, d\theta_0 \ldots d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)}, \\ \Phi(\theta_0, \ldots, \theta_3) &= \frac{1}{2\pi} \int F_r(x) h_+(x, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int F_a(x) h_-(x, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dx, \end{aligned}\right\} \quad (A.5.8)$$

являющемуся аналитической функцией k, регулярной в области (1.3).

Преобразуем сейчас полученное интегральное представление к импульсным переменным. Обозначим, как всегда, фурье-образы функций h_+, h_- через $\tilde{h}_+$, $\tilde{h}_-$ и заметим, что каковы бы ни были показатели r_1, s_1, мы всегда можем подобрать для них такие r, s, при которых из включений

$$h_+ \in C(r, s; 4 \mid \nu; \Omega_4), \quad h_- \in C(r, s; 4 \mid \nu; \Omega_4)$$

будут следовать включения

$$\tilde{h}_+ \in C(r_1, s_1; 4 \mid \nu; \Omega_4), \quad \tilde{h}_- \in C(r_1, s_1; 4 \mid \nu; \Omega_4).$$

Возьмем r_1, s_1 так, чтобы $\tilde{F}_r(p)$, $\tilde{F}_a(p)$ были интегрируемы на классе $C(r_1, s_1; \nu)$. Тогда

$$\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \int \tilde{F}_r(p) \tilde{h}_+(-p, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dp + \\ + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \int \tilde{F}_a(p) \tilde{h}_-(-p, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, dp.$$

Положим

$$H_{\pm}(p, k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^9 \int_0^{2\pi} \cdots \int \frac{\tilde{h}_{+}(-p, \theta_0, \ldots, \theta_3)\, d\theta_0 \ldots d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)}. \tag{A.5.9}$$

Введя такие функции, мы сможем представить соотношение (А.5.8) в виде

$$\tilde{F}(k) = \int \tilde{F}_r(p) H_{+}(p, k)\, dp + \int \tilde{F}_a(p) H_{-}(p, k)\, dp. \tag{A.5.10}$$

Функции $H_{\pm}$, определенные формулой (А.5.9), очевидно, обладают тем общим свойством, что какова бы ни была обобщенная функция $f(p)$, интегрируемая на классе $C(r_1, s_1; 4)$, выражения

$$\int f(p) H_{\pm}(p, k)\, dp$$

являются аналитическими функциями k, регулярными в области (А.1.3).

Условимся, для сокращения, иметь в виду именно это свойство, говоря, что $H_{\pm}(p, k)$ как функция p принадлежит к классу $C(r_1, s_1; 4)$, а как функция k является аналитической, регулярной в области (А.1.3). Функции эти мы будем называть универсальными, поскольку их вид зависит лишь от показателей класса C, числа η и т. п., а не от специального выбора F_r, F_a в данном классе.

Рассмотрим теперь вещественные [1]) $k = p$, лежащие в области (А.1.3). На основании леммы III имеем равномерно

$$T(p_0 \pm i0, \mathbf{p}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \to +0}{\to} 0,$$

и потому заключаем из (3.3), что в рассматриваемой области имеем, также в смысле равномерной сходимости,

$$\tilde{F}_r(p, \varepsilon) \to \tilde{F}(p), \quad \tilde{F}_a(p, \varepsilon) \to \tilde{F}(p), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

---

[1]) Вообще мы условимся вещественные импульсы обозначать буквами p, а комплексные — буквами k.

С другой стороны, во всем пространстве вещественных p справедливо несобственное (обобщенное) предельное соотношение

$$\tilde{F}_r(p, \varepsilon) \to \tilde{F}_r(p), \quad \tilde{F}_a(p, \varepsilon) \to \tilde{F}_a(p), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Следовательно,

$$\tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p) = \tilde{F}(p)$$

в области

$$|p_\alpha| < r_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Полученные здесь результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы:

Теорема I. 1°. *Пусть даны обобщенные функции $F_r(x)$, $F_a(x)$, из которых первая будет запаздывающей, а вторая — опережающей.*

2°. *Пусть существует такое положительное η, что*

$$\tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p)$$

в области

$$|p_0|^2 + |\mathbf{p}|^2 < \eta^2.$$

3°. *Возьмем положительные числа r_0, r_α, R, удовлетворяющие неравенствам*

$$2|\mathbf{r}| < R\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right), \quad R^2 + R^2\left(1 + \frac{r_0^2}{2R^2}\right)^2 + \mathbf{r}^2 < \frac{\eta^2}{2}. \tag{A.5.11}$$

Тогда можно построить аналитическую функцию $\tilde{F}(k)$ комплексных переменных $k(k_0, k_1, \ldots, k_3)$, регулярную в области

$$|k_\alpha| < r_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 3, \tag{A.5.12}$$

таким образом, что

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_a(p) = \tilde{F}_r(p)$$

в области вещественных переменных $p(p_0, \ldots, p_3)$, определенной неравенствами (A.5.12).

Кроме того, взяв достаточно большие показатели r, s, мы можем построить «универсальные» функции $H_\pm(p, k)$ со свойствами:

а) $H_{\pm}(p, k)$ *как функция* p *принадлежит к классу* $C(r, s; 4)$, *а как функция* k *является аналитической, регулярной в области* (А.5.12);

б) в области (А.5.12) *имеет место интегральное представление:*

$$\tilde{F}(k) = \int F_r(p) H_+(p, k)\, dp + \int F_a(p) H_-(p, k)\, dp.$$

А.6 Перейдем теперь к обобщению теоремы I.

Рассмотрим обобщенные функции:

$$F_{r,r}(x_1, x_2), \qquad F_{r,a}(x_1, x_2),$$
$$F_{a,r}(x_1, x_2), \qquad F_{a,a}(x_1, x_2),$$

для которых

$$\left.\begin{aligned} &F_{r,r}(x_1, x_2) = 0, \quad \text{если} \quad x_1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad x_2 \leqslant 0,\\ &F_{r,a}(x_1, x_2) = 0, \quad \text{если} \quad x_1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad x_2 \geqslant 0,\\ &F_{a,r}(x_1, x_2) = 0, \quad \text{если} \quad x_1 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad x_2 \leqslant 0,\\ &F_{a,a}(x_1, x_2) = 0, \quad \text{если} \quad x_1 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{А.6.1})$$

Предположим, что при некотором положительном η:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2) - \tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2) = 0, \quad \text{если} \quad p_{10}^2 + \mathbf{p}_1^2 < \eta^2,\\ &\tilde{F}_{i,r}(p_1, p_2) - \tilde{F}_{i,a}(p_1, p_2) = 0, \quad \text{если} \quad p_{20}^2 + \mathbf{p}_2^2 < \eta^2,\\ &\qquad i = r, a, \quad j = r, a. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{А.6.2})$$

Применим теорему I к выражениям $\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2)$, $\tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2)$, рассматривая их как функции p_1. Перейдем к функциям

$$\tilde{F}_j(k_1, p_2),$$

к которым опять применим теорему I, но уже по переменным p_2. Таким образом, убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Пусть $r_0, \ldots, r_3$ — *любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам* (А.5.11).

Тогда существует аналитическая функция $\tilde{F}(k_1, k_2)$ *комплексных переменных* $k_1(k_{10}, \ldots, k_{13})$, $k_2(k_{20}, \ldots, k_{23})$, *регулярная в области*

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha, \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha, \quad \alpha = 0, \ldots, 3. \tag{A.6.3}$$

Для вещественных $p_1 (p_{10}, \ldots, p_{13})$, $p_2 (p_{20}, \ldots, p_{23})$ *из этой области*

$$\tilde{F}(p_1, p_2) = \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2); \quad i = r, a, \quad j = r, a.$$

Кроме того, в рассматриваемой области (A.6.3) *имеет место интегральное представление*:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}(k_1, k_2) = \sum_{(i, j = r, a)} \int \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2) H_{i,j}(p_1, p_2; k_1, k_2)\, dp_1 dp_2, \\ &H_{ij}(p_1, p_2; k_1, k_2) = H_i(p_1, k_1) H_j(p_2, k_2); H_r = H_+, H_a = H_-, \end{aligned}\right\} \tag{A.6.4}$$

если только показатели класса $C(r, s; 4)$, *к которому должны принадлежать* $H_\pm$ (*как функции* p), *взяты достаточно высокими.*

Рассмотрим обобщенные функции:

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t); \quad i, j = r, a; \quad t \text{ — вещественное число,}$$

обладающие свойствами (A.6.1), (A.6.2) независимо от t. Заметим, что по самому определению обобщенных функций существует такой класс $C(r, s; 9)$, на котором $F_{i,j}$ будут интегрируемыми. Возьмем произвольную функцию $h(t)$ из класса $C(r, s; 1)$ и рассмотрим интеграл

$$F_{i,j}(x_1, x_2) = \int F_{i,j}(x_1, x_2; t)\, h(t)\, dt.$$

Нетрудно видеть, что эти $F_{i,j}(x_1, x_2)$ будут обобщенными функциями, интегрируемыми на классе $C(r, s; 8)$, и что они удовлетворяют условиям (A.6.1), (A.6.2). Мы можем поэтому воспользоваться ранее сформулированным утверждением и прийти, таким образом, к следующей лемме.

Лемма IV. *Пусть даны обобщенные функции*

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t), \quad i, j = r, a,$$

удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} F_{r,r}(x_1, x_2; t) &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim 0,\\ F_{r,a}(x_1, x_2; t) &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim 0,\\ F_{a,r}(x_1, x_2; t) &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim 0,\\ F_{a,a}(x_1, x_2; t) &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim 0, \end{aligned}\right\} \tag{A.6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0,\\ &\qquad \text{если} \quad p_{10}^2 + \mathbf{p}_1^2 < \eta^2; \quad j = r, a,\\ &\tilde{F}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \tilde{F}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0,\\ &\qquad \text{если} \quad p_{20}^2 + \mathbf{p}_2^2 < \eta^2; \quad i = r, a. \end{aligned}\right\} \tag{A.6.6}$$

Пусть $r_0, \ldots, r_3$ — *любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам* (А.5.11). *Тогда существует обобщенная функция* t, *являющаяся аналитической функцией* $\tilde{F}(k_1, k_2; t)$ *комплексных переменных* k_1, k_2, *регулярной в области*

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha; \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \tag{A.6.7'}$$

причем

$$\tilde{F}(p_1, p_2; t) = \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2; t)$$

в области вещественных p_1, p_2, *удовлетворяющих неравенствам* (А.6.7).

Рассмотрим теперь обобщенные функции

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t); \quad i, j = r, a,$$

удовлетворяющие условиям (А.6.5). Предположим, что вместо условий (А.6.6) выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0,\\ \text{если} \quad &|p_{10} - \lambda_{10}(t)|^2 + |\mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\lambda}_1(t)|^2 < \eta^2 \varepsilon_1^2(t),\\ &\tilde{f}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0,\\ \text{если} \quad &|p_{20} - \lambda_{20}(t)|^2 + |\mathbf{p}_2 - \boldsymbol{\lambda}_2(t)|^2 < \eta^2 \varepsilon_2^2(t), \end{aligned}\right\} \tag{A.6.8}$$

$$\tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t) = 0, \quad \text{если} \quad t < N. \tag{A.6.9}$$

Предположим, далее, что фигурирующие здесь функции $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ обладают нижеуказанными общими свойствами.

1°. $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ непрерывны и неограниченно дифференцируемы в интервале $N \leqslant t < \infty$;

2°. $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ полиномиально ограничены;

3°. $\varepsilon_j(t)$ существенно положительны и удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_j(t) > \frac{\nu}{|t|^m}, \qquad \nu > 0, \ m > 0;$$

4°. любая производная (какого угодно порядка) функций $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ равномерно ограничена в интервале $N \leqslant t < \infty$.

Продолжим теперь каким-либо образом эти функции $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ на всю вещественную ось с сохранением всех перечисленных свойств. Тогда нетрудно убедиться, что каковы бы ни были показатели r, s класса C, всегда можно найти показатели r_1, s_1 таким образом, что из $h(x_1, x_2; t) \in C(r_1, s_1; 9)$ вытекает

$$e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}\, h\{\varepsilon_1(t)x_1, \ \varepsilon_2(t)x_2; \ t\} \in C(r, \ s; \ 9).$$

Следовательно, для любой обобщенной функции $f(x_1, x_2, t)$ мы можем подобрать такие r_1, s_1, что интеграл

$$\int f(x_1, x_2, t)\, e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}\, h\{\varepsilon_1(t)x_1, \ \varepsilon_2(t)x_2; \ t\}\, dx_1\, dx_2\, dt$$

будет тогда определен как линейный функционал от $h(x_1, x_2; t) \in C(r, s; 9)$. Но этот линейный функционал может быть преобразован к виду

$$\int f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \ \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; \ t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}} \times$$

$$\times \frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4}\, h(x_1, \ x_2; \ t)\, dx_1\, dx_2\, dt,$$

определяющему обобщенную функцию

$$\frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4} f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \ \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; \ t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}}.$$

Таким образом, раз $f_{i,j}(x_1, x_2; t)$ являются обобщенными функциями, выражения

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t) = \\ = \frac{1}{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^4} f_{i,j}\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1 + \frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}} \tag{A.6.10}$$

также будут обобщенными функциями.

Далее, ввиду того, что $f_{i,j}$ удовлетворяют условиям (А.6.5), введенные функции $F_{i,j}$ также им удовлетворяют. Заметим еще, что

$$\tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2; t) = \tilde{f}_{i,j}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t\}.$$

Поэтому из (А.6.8) вытекает, что $\tilde{F}_{i,j}$ удовлетворяют условиям (А.6.6).

Итак, мы можем применить к функциям $F_{i,j}(x_1, x_2; t)$ лемму IV, в результате чего убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Лемма V. *Пусть даны обобщенные функции*

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t), \quad i, j = r, a,$$

удовлетворяющие условиям (А.6.5), (А.6.8), (А.6.9). *Предполагается, что функции* $\lambda_{ja}(t)$; $\varepsilon_j(t)$ *обладают свойствами* 1°, 2°, 3°, 4°. *Возьмем числа* r_α, $\alpha = 0, \ldots, 3$ *так же, как и в теореме I. Тогда существует обобщенная функция*

$$\tilde{f}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)k_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)k_2; t\},$$

являющаяся аналитической функцией комплексных переменных k_1, k_2, *регулярной в области*

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha, \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha, \quad \alpha = 0, \ldots, 3, \tag{A.6.11}$$

такая, что в области вещественных p_1, p_2, *удовлетворяющих неравенствам* (А.6.11):

$$\tilde{f}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t\} = \\ = \tilde{f}_{i,j}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t\}.$$

Кроме того,

$$\tilde{f}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)k_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)k_2; t\} = 0 \quad \text{при} \quad t < N.$$

А.7. Теорема II. *При данных постоянных*

$$M \geqslant \mu > 0; \quad \delta \geqslant 0, \quad 1 \geqslant \omega \geqslant 0; \quad V \geqslant 0$$

можно найти такое $\rho > 0$, *чтобы имело место следующее утверждение: пусть*

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t), \quad i, j = r, a$$

являются обобщенными функциями, инвариантными по отношению к пространственным вращениям (векторов $\mathbf{x}$*), удовлетворяющими условиям* (А.6.5) *и, кроме того, условиям*

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t) = 0, \\ &\text{если} \\ &(p_{10}+t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < (M+\mu)^2 \quad (p_{10}-t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < 9\mu^2, \end{aligned}\right\} \tag{А.7.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}_{i,r}(p_1, p_2, t) - \tilde{f}_{i,a}(p_1, p_2, t) = 0, \\ &\text{если} \\ &(p_{20}+t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < (M+\mu)^2 \quad (p_{20}-t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < 9\mu^2, \end{aligned}\right\} \tag{А.7.2}$$

$$\tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2, t) = 0, \quad \text{если} \quad t < \frac{1}{2}[M + \mu(1+\delta)]. \tag{А.7.3}$$

Тогда существует обобщенная функция переменной t, *являющаяся аналитической функцией комплексных переменных* $z_1, \ldots, z_5$,

$$\Phi(z_1, \ldots, z_5; t),$$

регулярной в области

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \ |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \ |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \\ &\quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \ |z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2, \\ &\quad -V \leqslant \tau < \mu^2(1-\omega), \ 4a^2 \leqslant u^2, \end{aligned}\right\} \tag{А.7.4}$$

где

$$u^2 = \left[M + \mu(1+\delta) + \frac{M^2 - \mu^2(1-\omega)}{M + \mu(1+\delta)}\right]^2 - 4M^2, \tag{А.7.5}$$

и обладающая свойствами:

1°. $\Phi(z_1, \ldots, z_5; t) = 0,$ *если* $t < \frac{1}{2}[M + \mu(1+\delta)]$.

2°. *В области вещественных 4-векторов* p_1, p_2, *для которых величины*

$$\left.\begin{array}{c} z_1 = (p_{10}+t)^2 - \mathbf{p}_1^2, \quad z_2 = (p_{20}+t)^2 - \mathbf{p}_2^2, \quad z_3 = (p_{10}-t)^2 - \mathbf{p}_1^2, \\ z_4 = (p_{20}-t)^2 - \mathbf{p}_2^2, \quad z_5 = (p_{10}-p_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \end{array}\right\} \tag{A.7.6}$$

удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{array}{c} |z_1 - M^2| < \rho\mu^2, |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, |z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \\ |z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad -V \leqslant \tau < \mu^2(1-\omega), \; 4a^2 \leqslant u^2, \end{array}\right\} \tag{A.7.7}$$

имеем

$$\tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t) = \Phi(z_1, \ldots, z_5; t). \tag{A.7.8}$$

Доказательство. Будем основываться на лемме V. Положим

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_{10}(t) = \lambda_{20}(t) = \dfrac{M^2 - \tau}{4t}, \\ \boldsymbol{\lambda}_1(t) = \mathbf{e}_1\varphi_1(t) + \mathbf{e}_2 a; \; \boldsymbol{\lambda}_2(t) = \mathbf{e}_1\varphi(t) - \mathbf{e}_2 a, \\ \varphi(t) = \sqrt{\left[t + \dfrac{M^2-\tau}{4t}\right]^2 - M^2 - a^2}\,. \end{array}\right\} \tag{A.7.9}$$

Здесь $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — два произвольных, взаимно-перпендикулярных орта; τ, a — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$-V \leqslant \tau < \mu^2(1-\omega), \quad 4a^2 \leqslant u^2. \tag{A.7.10}$$

Введем также

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t + \dfrac{M^2-\tau}{4t}}. \tag{A.7.11}$$

Заметим, что в интересующем нас интервале

$$t \geqslant \frac{M + \mu(1+\delta)}{2}$$

будет

$$\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-a^2>0.$$

Поэтому функции $\varepsilon_j(t)$, $\lambda_j(t)$ удовлетворяют условиям 1°—4° леммы V. Возьмем, далее, число ζ так, чтобы

$$\sup_{2t \geqslant M+\mu(1+\delta)} \left\{ \frac{\zeta}{\mu} \frac{2\sqrt{-M^2+\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2+\left(t\pm\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2}}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}} + \right.$$

$$\left. + \zeta^2 \frac{1}{\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} 2\frac{M}{\mu}+1 \\ 8 \end{array} \right. . \qquad (A.7.12)$$

Ясно тогда, что

$$2\sqrt{[\lambda_{j0}(t)\pm t]^2+\boldsymbol{\lambda}_j^2(t)}\;\varepsilon_j(t)\,\zeta\,\mu+\varepsilon_j^2(t)\,\zeta^2\mu^2 < \left\{ \begin{array}{l} 2M\mu+\mu^2 \\ 8\mu^2 \end{array} \right. . \qquad (A.7.13)$$

Пусть теперь

$$|p_{10}-\lambda_{10}(t)|^2+|\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}_1(t)|^2<\zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t).$$

Имеем:

$$(p_{10}\pm t)^2-\mathbf{p}_1^2=[\lambda_{10}(t)\pm t]^2-\boldsymbol{\lambda}_1^2(t)+$$

$$+2[\lambda_{10}(t)\pm t][p_{10}-\lambda_{10}(t)]-2\boldsymbol{\lambda}_1(t)[\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}_1(t)]+$$

$$+[p_{10}-\lambda_{10}(t)]^2-[\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}_1(t)]^2<[\lambda_{10}(t)\pm t]^2-\boldsymbol{\lambda}_1^2(t)+$$

$$+2\sqrt{[\lambda_{10}(t)\pm t]^2+\boldsymbol{\lambda}_1^2(t)}\;\varepsilon(t)\,\zeta\,\mu+\varepsilon^2(t)\,\zeta^2\mu. \qquad (A.7.14)$$

Но, очевидно,

$$[\lambda_{10}(t)+t]^2-\boldsymbol{\lambda}_1^2(t)=M^2,\quad [\lambda_{10}(t)-t]^2-\boldsymbol{\lambda}_1^2(t)=\tau$$

и потому на основании (A.7.13) и (A.7.14)

$$(p_{10}+t)^2-\mathbf{p}_1^2<M^2+2M\mu+\mu^2=(M+\mu)^2,$$
$$(p_{10}-t)^2-\mathbf{p}_1^2<\tau+8\mu^2\leqslant 9\mu^2.$$

Совершенно аналогично из неравенства

$$|p_{20}-\lambda_{20}(t)|^2+|\mathbf{p}_2-\boldsymbol{\lambda}_2(t)|^2<\zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t)$$

будет вытекать

$$(p_{20}+t)^2-\mathbf{p}_2^2<(M+\mu)^2,$$
$$(p_{20}-t)^2-\mathbf{p}_2^2<9\mu^2.$$

Таким образом, из (A.7.1) и (A.7.2) получим

$$\tilde{f}_{r,j}(p_1, p_2; t)-\tilde{f}_{a,j}(p_1, p_2; t)=0,$$

если

$$|p_{10}-\lambda_{10}(t)|^2+|\mathbf{p}_1-\boldsymbol{\lambda}_1(t)|^2<\zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t)$$

и

$$\tilde{f}_{i,r}(p_1, p_2; t)-\tilde{f}_{i,a}(p_1, p_2; t)=0,$$

если

$$|p_{20}-\lambda_{20}(t)|^2+|\mathbf{p}_2-\boldsymbol{\lambda}_2(t)^2|<\zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t).$$

Мы можем, следовательно, применить лемму V, взяв в ней

$$\eta=\zeta\mu, \qquad N=\frac{M+\mu(1+\delta)}{2}.$$

Чтобы удовлетворить неравенствам (A.5.11) теоремы I, примем

$$r_0=\frac{1}{2\sqrt{6}}\zeta\mu, \qquad |\mathbf{r}|=\frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu.$$

Теперь, в соответствии с упомянутой леммой, убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Существует обобщенная функция t

$$\tilde{f}(k_1, k_2; t), \tag{A.7.15}$$

являющаяся аналитической функцией комплексных 4-векторов k_1, k_2, регулярной в области

$$\left.\begin{aligned} |k_{10}-\lambda_{10}(t)| &< \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\mu\varepsilon(t),\\ |\mathbf{k}_1-\boldsymbol{\lambda}_1(t)| &< \frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t),\\ |k_{20}-\lambda_{20}(t)| &< \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\mu\varepsilon(t),\\ |\mathbf{k}_2-\boldsymbol{\lambda}_2(t)| &< \frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t) \end{aligned}\right\} \tag{A.7.16}$$

и обладающая свойствами:

1°. *В области вещественных p_1, p_2, удовлетворяющих неравенствам* (7.16)

$$\tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t) = \tilde{f}(p_1, p_2; t);$$

2°. $\tilde{f}(p_1, p_2; t) = 0, \quad$ если $\quad t < \dfrac{M+\mu(1+\delta)}{2}$.

Воспользуемся сейчас условием инвариантности по отношению к пространственным вращениям. Ввиду этого условия функция (А.7.15) зависит от k_1, k_2 лишь через посредство пяти переменных:

$$k_{10},\ k_{20},\ \mathbf{k}_1^2,\ \mathbf{k}_2^2,\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2.$$

Вместо них можем ввести совершенно эквивалентную систему переменных:

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = (k_{10}+t)^2 - \mathbf{k}_1^2, \quad z_2 = (k_{20}+t)^2 - \mathbf{k}_2^2,\\ &z_3 = (k_{10}-t)^2 - \mathbf{k}_1^2, \quad z_4 = (k_{20}-t)^2 - \mathbf{k}_2^2,\\ &z_5 = (k_{10}-k_{20})^2 - (\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{A.7.17}$$

так что

$$\tilde{f}(k_1, k_2; t) = \Phi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; t). \tag{A.7.18}$$

Следовательно, для завершения доказательства нашей теоремы нам остается убедиться, что (при соответствующем подборе числа ρ) мы можем найти комплексные 4-векторы, удовлетворяющие неравенствам (А.7.16) для произвольных комплексных $z_1, \ldots, z_5$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \; |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \; |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \\ &|z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \\ &4a^2 \leqslant u^2, \; -V \leqslant \tau < \mu^2(1-\omega). \end{aligned}\right\} \tag{А.7.19}$$

Перейдем поэтому к вопросу о построении k_1, k_2 по данным $z_1, \ldots, z_5, t$. Из (А.7.17) найдем

$$k_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t}, \quad k_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t}, \tag{А.7.20}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{k}_1^2 &= t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2, \\ \mathbf{k}_2^2 &= t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2, \\ (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 &= -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{А.7.21}$$

Чтобы подобрать $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, удовлетворяющие соотношениям (А.7.16), положим

$$\mathbf{k}_1 = A\mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k}_2 = B\mathbf{e}_1 - C\mathbf{e}_2,$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — два взаимно-перпендикулярных орта. Тогда для определения A, B, C из (А.7.21) получим уравнения:

$$A^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2,$$

$$B^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2,$$

$$(A - B)^2 + 4C^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2,$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} A &= A(t;\, z_1, \ldots, z_5) \\ B &= B(t;\, z_1, \ldots, z_5) \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{D} \pm \\ &\pm \frac{1}{2}\,\frac{\frac{z_2 + z_4 - z_1 - z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2}{\sqrt{D}}; \end{aligned}\right\} \tag{А.7.22}$$

$$\left.\begin{aligned} C(t;\, z_1, \ldots, z_5) = \frac{1}{2}\Bigg\{ -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2 - \\ - \frac{\left[\dfrac{z_2 + z_4 - z_1 - z_3}{2} + \left(\dfrac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 - \left(\dfrac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2\right]^2}{D}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A.7.22)}$$

где

$$D = 4t^2 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_5) + 2\left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2 + \\ + 2\left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2.$$

Как видно,

$$A(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = \varphi(t),$$
$$B(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = \varphi(t),$$
$$C(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = a.$$

Таким образом, наша теорема будет доказана, как только мы покажем, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\xi_1 - \xi_3}{4t} < \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\,\frac{\mu}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}}; \quad \left|\frac{\xi_2 - \xi_4}{4t}\right| < \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\,\frac{\mu}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}}; \\ &\Bigg| A\left(t;\, M^2 + \xi_1, M^2 + \xi_2, \tau + \xi_3, \tau + \xi_4, -4a^2 + \xi_5\frac{M^2}{t^2}\right) - \\ &\qquad - A(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2)\Bigg| < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}}; \\ &\Bigg| B\left(t;\, M^2 + \xi_1, M^2 + \xi_2, \tau + \xi_3, \tau + \xi_4, -4a^2 + \xi_5\frac{M^2}{t^2}\right) - \\ &\qquad - B(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2)\Bigg| < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}}; \\ &\Bigg| C\left(t;\, M^2 + \xi_1, M^2 + \xi_2, \tau + \xi_3, \tau + \xi_4, -4a^2 + \xi_5\frac{M^2}{t^2}\right) - \\ &\qquad - C(t;\, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}} \end{aligned}\right\}$$

(A.7.23)

для

$$t \geqslant \frac{M+\mu(1+\delta)}{2}, \quad -V \leqslant \tau < \mu^2(1-\omega), \quad 4a^2 \leqslant u^2,$$

$$|\xi_j| < \rho\mu^2, \quad j=1, \ldots, 5.$$

Но возможность такого подбора достаточно малого значения ρ непосредственно следует из рассмотрения[1]) выражений (A.7.22).

Примечание. Рассмотрим частный случай теоремы II, когда $\delta = \omega = 0$. В этом случае $u=0$ и, следовательно, $a=0$. Таким образом, область значений z_5, принадлежащих к области регулярности функции $\Phi(z_1, \ldots, z_5; t)$, будет ограничена неравенством

$$|z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Нетрудно, однако, с помощью совершенно элементарных рассуждений расширить пределы возможного изменения $\operatorname{Re} z_5$.

Действительно, возьмем в классе $C(0, \infty; 1)$ функцию $h(t)$ так, чтобы

$$h(t) = 0, \quad t < M + \frac{\mu}{2},$$

$$h(t) = 1, \quad t > M + \mu.$$

Положим:

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) = f_{i,j}^{(1)}(x_1, x_2; t) + f_{i,j}^{(2)}(x_1, x_2; t),$$

$$f_{i,j}^{(1)}(x_1, x_2; t) = [1 - h(t)] f_{i,j}(x_1, x_2; t),$$

$$f_{i,j}^{(2)}(x_1, x_2; t) = h(t) f_{i,j}(x_1, x_2; t).$$

---

1) Неравенства (A.7.23) с функциями A, B имели бы место и без умножения ξ_5 на $\frac{M^2}{t^2}$. Такое умножение необходимо лишь для обеспечения неравенства с функцией C, поскольку только с аргументом $\xi_5 \frac{M^2}{t^2}$ левая часть его будет, при больших t, пропорциональна $\frac{1}{t}$.

Функции $f_{i,j}^{(1)}$, $f_{i,j}^{(2)}$ удовлетворяют условиям нашей теоремы. Первая из них при $\omega = 0$, $\delta = 0$, а вторая — при $\omega = 0$, $\delta = \frac{M}{\mu}$. Рассмотрим области регулярности функций $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, выписывая соответствующие неравенства лишь для аргумента z_5. Для первой из них

$$|z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$|\operatorname{Re} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Но, очевидно,

$$\Phi^{(1)} = 0 \quad \text{для} \quad t > M + \mu,$$

поэтому $\Phi^{(1)}$ регулярна при

$$|\operatorname{Re} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{M+\mu}\right)^2, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Далее, для $\Phi^{(2)}$

$$u^2 = \left(2M + \mu + \frac{M^2 - \mu^2}{2M + \mu}\right)^2 - 4M^2 > 0.$$

Поэтому $\Phi^{(2)}$ будет регулярна при

$$-u^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Пусть ρ_1 будет наименьшим из чисел

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{M+\mu}\right)^2, \quad \left(\frac{u}{\mu}\right)^2.$$

Тогда видим, что обе функции $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, а следовательно и их сумма $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ будут регулярны при

$$-\rho_1\mu^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Мы убедились, таким образом, в справедливости следующего утверждения.

Теорема III. *Если условия теоремы II выполнены при* $\omega = \delta = 0$, *то можно подобрать достаточно малое*

$\rho > 0$ *так, чтобы*

$$\Phi(z_1, \ldots, z_5; t)$$

была регулярна в области

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \ |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \ |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \ |z_4 - \tau| < \rho\mu^2,$$

$$-\rho\mu^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \ |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2, -V \leqslant \tau \leqslant \mu^2.$$

Заметим, что нижний предел изменения $\operatorname{Re} z_5$ может быть существенно раздвинут, но это уже потребует более глубоких соображений.

А.8. Теорема IV. *Рассмотрим обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ 4-вектора x, из которых одна будет запаздывающей, а другая — опережающей. Пусть фурье-образ $\tilde{f}(p)$ их разности*

$$f(x) = F_r(x) - F_a(x)$$

обращается в нуль ($\tilde{f}(p) = 0$) для $|p_0| < m$. Тогда существует аналитическая функция $\tilde{F}(k)$ комплексного 4-вектора k, регулярная в области

$$|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < |\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}|, \tag{A.8.1}$$

такая, что для вещественных $k = p$ из этой области

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p).$$

Доказательство. Возьмем в классе $C(0, \infty; 1)$ функцию $\varphi(t)$ такую, что

$$\varphi(t) = 1, \quad x_0 \geqslant 0,$$
$$\varphi(t) = 0, \quad x_0 \leqslant -\delta,$$

где δ — некоторое положительное число.

Фиксируем сколь угодно малое положительное ρ и заметим, что функция

$$\varphi(x_0)\, e^{-\rho \mathbf{x}^2 + ikx}$$

будет принадлежать к классу $C(\infty, \infty; 4)$, если только $\operatorname{Im} k_0 > 0$ (k_0 комплексно). Поэтому можем определить интеграл

$$\tilde{F}_r(k_j;\ \rho) \equiv \tilde{F}_r(k_0,\ \mathbf{k};\ \rho) = \int F_r(x)\,\varphi(x_0)\,e^{-\rho\mathbf{x}^2+ikx}\,dx, \quad (\text{A}.8.2)$$

представляющий аналитическую функцию k, регулярную в области, где $\operatorname{Im} k_0 > 0$. Нетрудно видеть, что этот интеграл не зависит от специального выбора функции $\varphi(t)$. Действительно, если φ_1 и φ_2 представляют две возможные реализации функции φ, то имеем

$$\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0 \quad \text{для} \quad x_0 \geqslant 0,$$

откуда видим, что в силу свойства запаздывания во всем 4-мерном пространстве

$$\int F_r(x)\,[\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)]\,e^{-\rho\mathbf{x}^2+ikx}\,dx = 0.$$

Поэтому мы будем записывать (А.8.2) в форме

$$\tilde{F}_r(k;\ \rho) = \int F_r(x)\,e^{-\rho\mathbf{x}^2+ikx}\,dx, \quad (\text{A}.8.3)$$

принимая правую часть (А.8.2) за определение такого интеграла.

Совершенно аналогично определяем функцию

$$\tilde{F}_a(k;\ \rho) = \int F_a(x)\,e^{-\rho\mathbf{x}^2+ikx}\,dx, \quad (\text{A}.8.4)$$

являющуюся аналитической, регулярной в области, где $\operatorname{Im} k_0 < 0$.

Заметим, что выражения (А.8.3), (А.8.4) имеют смысл и для вещественных k_0. Действительно, их можно рассматривать тогда, как фурье-образы обобщенной функции одного переменного x_0:

$$\int F_j(x)\,e^{-\rho\mathbf{x}^2-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}, \quad j = r,\ a.$$

Таким образом, $\tilde{F}_r(k_0,\ \mathbf{k};\ \rho)$, $\tilde{F}_a(k_0,\ \mathbf{k};\ \rho)$ для вещественных k_0 будут обобщенными функциями k_0, являющимися аналитическими функциями $\mathbf{k}$. Нетрудно убедиться также, что в обобщенном смысле (по отношению к вещественной переменной p_0):

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to+0} \tilde{F}_r(p_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}; \rho) &= \tilde{F}_r(p_0,\ \mathbf{k};\ \rho), \\ \lim_{\varepsilon\to+0} \tilde{F}_a(p_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}; \rho) &= \tilde{F}_a(p_0,\ \mathbf{k};\ \rho). \end{aligned}\right\} \quad (\text{A}.8.5)$$

Наконец, в обобщенном смысле по отношению к вещественному 4-вектору p

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\rho\to+0}\tilde{F}_r(p;\rho)=\tilde{F}_r(p),\\ \lim_{\rho\to+0}\tilde{F}_a(p;\rho)=\tilde{F}_a(p),\end{aligned}\right\} \tag{A.8.6}$$

где $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_a$ — обычные фурье-образы функции $F_r(x)$, $F_a(x)$.

Рассмотрим разность:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon;\mathbf{k};\rho)\right\}=$$
$$=\tilde{F}_r(p_0,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0,\mathbf{k};\rho)=\int f(x)\,e^{ip_0x_0}\,e^{-\rho\mathbf{x}^2-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,dx_0\,d\mathbf{x}.$$

Но, по условию теоремы,

$$\int f(x)\,e^{ip_0x_0}\,dx_0=0 \quad \text{для} \quad |p_0|<m,$$

следовательно,

$$\lim_{\to+0}\left\{\tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)\right\}=0 \quad \text{для} \quad |p_0|<m \tag{A.8.7}$$

и потому $\tilde{F}_a(k;\rho)$, $\tilde{F}_r(k;\rho)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию $\tilde{F}(k;\rho)$ соответственно в областях $\operatorname{Im}k_0>0$, $\operatorname{Im}k_0<0$. Область определения $\tilde{F}(k;\rho)$ распространяется на все положения комплексного вектора $\mathbf{k}$; по отношению к комплексной переменной k_0 эта функция имеет линии разреза

$$-\infty<k_0\leqslant-m,\qquad m\leqslant k_0<\infty. \tag{A.8.8}$$

Заметив это, фиксируем числа λ, m_1:

$$0\leqslant\lambda\leqslant1,\qquad 0\leqslant m_1<m \tag{A.8.9}$$

и построим выражение

$$\Phi(k_0)=\tilde{F}\left(k_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho\right), \tag{A.8.10}$$

в котором $\mathbf{f}$ — вещественный вектор, $\mathbf{e}$ — вещественный орт.

Образуем «симметризованную» и «антисимметризованную» функции, инвариантные по отношению к перемене знака входящего квадратного корня:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_s(k_0) &= \frac{1}{2}\tilde{F}\left(k_0, \lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)+\\ &\quad+\frac{1}{2}\tilde{F}\left(k_0, -\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right),\\ \Phi_a(k_0) &= \frac{1}{2\sqrt{k_0^2-m^2}}\left\{\tilde{F}\left(k_0, \lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)-\right.\\ &\quad\left.-\tilde{F}\left(k_0, -\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{A}.8.11)$$

Для них, ввиду (А.8.7), будем иметь:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}&\{\Phi_s(p_0+i\varepsilon)-\Phi_s(p_0-i\varepsilon)\}=\\ &=\frac{1}{2}\tilde{F}_r\left(p_0, \lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)-\\ &-\frac{1}{2}\tilde{F}_a\left(p_0, \lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)+\\ &+\frac{1}{2}\tilde{F}_r\left(p_0, -\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)-\\ &-\frac{1}{2}\tilde{F}_a\left(p_0, -\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\ \rho\right)=0\end{aligned}\qquad (\mathrm{A}.8.12)$$

для $|p_0| < m$.

Совершенно аналогично найдем также

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\Phi_a(p_0+i\varepsilon)-\Phi_a(p_0-i\varepsilon)\}=0 \quad \text{для} \quad |p_0|<m. \qquad (\mathrm{A}.8.13)$$

Итак, мы можем рассматривать $\Phi_s(k_0)$, $\Phi_a(k_0)$ как аналитические функции комплексного переменного k_0, регулярные во всей комплексной плоскости за исключением линий разреза (А.8.8).

Обсудим теперь вопрос о характере возможного роста этих функций на бесконечности. Из рассмотрения режущего фактора:

$$\exp\left(-\rho\mathbf{x}^2-x_0\,\mathrm{Im}\,k_0\pm\lambda\mathbf{x}\mathbf{e}\,\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}\right),$$

можно установить следующее свойство: имеется такое целое положительное n_0, что при сколь угодно малой $\sigma > 0$ выражения $|\Phi_s(k_0)|$, $|\Phi_a(k_0)|$ для $|\operatorname{Im} k_0| \geqslant \sigma$ ограничены некоторым полиномом степени n_0.

Чтобы воспользоваться теоремой Коши, подберем соответствующий множитель $h(k_0)$, который смог бы обеспечить достаточное убывание произведений

$$\begin{aligned}&\Phi_s(k_0)\,h(k_0),\\ &\Phi_a(k_0)\,h(k_0)\end{aligned} \tag{A.8.14}$$

на бесконечности.

Возьмем для этого какую-либо функцию $g(\tau)$ вещественного переменного τ, обладающую непрерывными производными всех порядков в интервале

$$a \leqslant \tau \leqslant b \quad (a > m^2),$$

такую, что она со всеми своими производными обращается в нуль в граничных точках этого интервала. Построим функцию комплексного переменного:

$$h^{(n)}(k_0) = \int_a^b \frac{g(\tau)}{\left(k_0^2 - \tau\right)^n}\, d\tau \tag{A.8.15}$$

и заметим, что она является аналитической функцией, регулярной во всей комплексной плоскости, за исключением линий разреза

$$\operatorname{Im} k_0 = 0, \ a \leqslant k_0^2 \leqslant b.$$

На бесконечности $h^n(k_0)$ и ее производные любого порядка убывают не медленнее, чем

$$\frac{\text{const}}{\left|k_0^2\right|^n}.$$

Кроме того, когда

$$\operatorname{Im} k_0 \to +0, \qquad \operatorname{Re} k_0 = p_0,$$

имеем равномерно[1]) по отношению к $p_0\ (-\infty < p_0 < \infty)$

$$h^{(n)}(k_0) \to h_+^{(n)}(p_0), \qquad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q} \to \frac{d^q h_+^{(n)}(p_0)}{dp_0^q}, \qquad q = 1, 2, \ldots$$

[1]) Здесь имеется в виду обычная равномерная сходимость.

Если же

$$\operatorname{Im} k_0 \to -0, \qquad \operatorname{Re} k_0 = p_0,$$

то имеем, также равномерно по отношению к p_0 $(-\infty < p_0 < \infty)$,

$$h^{(n)}(k_0) \to h_-^{(n)}(p_0), \qquad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q} \to \frac{d^q h_-^{(n)}(p_0)}{dp_0^q}, \qquad q = 1, 2, \ldots$$

Предельные функции

$$h_+^{(n)}(p_0), \ h^{(n)}(\ _0)$$

вещественного переменного p_0 непрерывны со своими производными любого порядка на всей вещественной оси; при

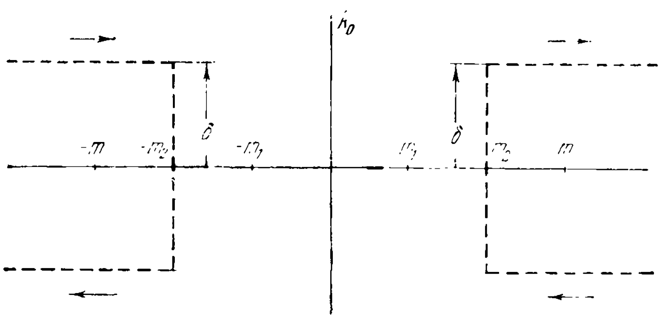


Рис. 3.

$p_0 \to \pm\infty$ функции эти и их производные стремятся к нулю не медленнее, чем $\frac{\text{const}}{|p_0^2|^n}$. Ясно, наконец, что $h_+^{(n)}(p_0) = h_-^{(n)}(p_0)$, если $p_0^2 < a$ или $p_0^2 > b$, т. е. во всяком случае, если $p_0^2 \leqslant m^2$.

Поэтому $(j = s, a)$

$$\Phi_j(p_0 + i0)\, h_+^{(n)}(p_0) - \Phi_j(p_0 - i0)\, h_-^{(n)}(p_0) = 0, \text{ если } |p_0| \leqslant m, \tag{A.8.16}$$

где

$$\Phi_j(p_0 \pm i0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_j(p_0 \pm i\varepsilon).$$

Возьмем теперь $2n \geqslant n_0 + 1$. Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$|h(k_0)\Phi_j(k_0)| < \frac{C_\varepsilon}{|k_0|}, \quad |\operatorname{Im} k_0| \geqslant \varepsilon.$$

Далее, раз последовательности $\Phi_j(p_0 \pm i\varepsilon)$ сходятся в обобщенном смысле, мы можем по самому определению такой сходимости найти класс $C(r, s; 1)$, на котором она имеет место. Возьмем $2n \geqslant r-1$. Тогда последовательности $h(p_0 \pm i\varepsilon) \times \Phi_j(p_0, \pm i\varepsilon)$ окажутся сходящимися в обобщенном смысле на классе $C(1, s; 1)$. При сделанном выборе числа n мы можем применить теорему Коши, взяв за контур интеграции контур рис. 3, окружающий линии разреза. Совершив предельный переход при $\delta \to +0$, получим

$$h(k_0)\Phi_j(k_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_j(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_j(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{\zeta - k_0}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_j(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_j(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{\zeta - k_0}\,d\zeta, \quad j = s, a$$

для любого k_0, не лежащего на линии разреза (А.8.8). Но по самому определению Φ_s, Φ_a имеем

$$\Phi(k_0) = \Phi_s(k_0) + \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\,\Phi_a(k_0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(k_0)\Phi(k_0) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_s(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_s(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\,d\zeta + \\ & + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_a(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_a(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\,d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_s(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_s(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\,d\zeta + \\ & + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_a(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_a(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\,d\zeta. \end{aligned} \tag{А.8.17}$$

Рассмотрим теперь произвольный комплексный 4-вектор k, для которого выполнено неравенство (А.8.1). Ясно, что для него можно указать такое $m_1^2 < m^2$, чтобы

$$|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \left|\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right|. \tag{А.8.18}$$

Эти значения m_1^2 мы и используем в наших рассуждениях. Далее, для данного k построим $\lambda(k)$, $\mathbf{e}(k)$, положив

$$\lambda(k) = \frac{|\operatorname{Im} \mathbf{k}|}{\left|\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right|}, \qquad \mathbf{e}(k) = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{k}}{|\operatorname{Im} \mathbf{k}|} \frac{\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{\left|\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right|}. \tag{А.8.19}$$

Тогда

$$\operatorname{Im} \mathbf{k} = \lambda(k)\, \mathbf{e}(k) \operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}. \tag{А.8.20}$$

Возьмем также

$$\mathbf{f} = \operatorname{Re} \mathbf{k} - \lambda(k)\, \mathbf{e}(k) \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}$ — произвольный вещественный вектор. Получим из (8.17)

$$h(k_0)\, \tilde{F}(k_0, \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{m_2}^{\infty} \frac{A_s(\zeta, \mathbf{q};\ k, \rho)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i} \int_{m_2}^{\infty} \frac{A_a(\zeta, \mathbf{q};\ k, \rho)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-m_2} \frac{A_s(\zeta, \mathbf{q};\ k, \rho)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-m_2} \frac{A_a(\zeta, \mathbf{q};\ k, \rho)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta, \tag{А.8.21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &A_s(\zeta, \mathbf{q};\ k, \rho) = \\ &= \frac{h_+(\zeta)}{2} \left\{\tilde{F}_r(\zeta, \mathbf{v}_- + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho) + \tilde{F}_r(\zeta, -\mathbf{v}_+ + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho)\right\} - \\ &- \frac{h_-(\zeta)}{2} \left\{\tilde{F}_a(\zeta, \mathbf{v}_- + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho) + \overline{F}_a(\zeta, -\mathbf{v}_+ + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho)\right\}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_a(\zeta, \mathbf{q}; k, \rho) = \\ &= \frac{h_+(\zeta)}{2\sqrt{\zeta^2 - m_1^2}} \left\{ \tilde{F}_r(\zeta, \mathbf{v} + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho) - \right. \\ &\qquad \left. - \tilde{F}_r(\zeta, -\mathbf{v}_+ + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho) \right\} - \\ &- \frac{h_-(\zeta)}{2\sqrt{\zeta^2 - m_1^2}} \left\{ \tilde{F}_a(\zeta, \mathbf{v}_- + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho) - \right. \\ &\qquad \left. - \tilde{F}_a(\zeta, -\mathbf{v}_+ + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (\text{A.8.22})$$

и введено обозначение

$$\mathbf{v}_\pm = \lambda(k)\,\mathbf{e}(k)\left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} \pm \operatorname{Re}\sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right).$$

Подчеркнем здесь, что

$$\left.\begin{aligned} A_s(\zeta, \mathbf{q}; k, \rho) = 0 \\ A_a(\zeta, \mathbf{q}; k, \rho) = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{если} \quad |\zeta| < m. \qquad (\text{A.8.23})$$

Перейдем теперь к исследованию перехода $\rho \to 0$. Покажем, например, что для $\zeta > m_2$ выражение

$$\tilde{F}_r\left\{\zeta, \lambda(k)\,\mathbf{e}(k)\left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re}\sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\right\}$$

как функция переменных ζ, $\mathbf{q}$ сходится в обобщенном смысле к

$$\tilde{F}_r\left\{\tau, \lambda(k)\,\mathbf{e}(k)\left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re}\sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}\right\}.$$

Рассмотрим, в самом деле, интеграл

$$\int \tilde{F}_r\left\{\zeta, \lambda(k)\,\mathbf{e}(k)\left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re}\sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \right. \\ \left. + \operatorname{Re}\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\right\} H(\zeta, \mathbf{q})\,d\zeta\,d\mathbf{q},$$

в котором функция $H(\tau, \mathbf{q})$ принадлежит к некоторому классу $C(r, s; 4)$ с достаточно высокими показателями r, s и обращается в нуль для $\zeta < m_2$.

Имеем:

$$\int \tilde{F}_r \{ \zeta, \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) +$$
$$+ \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho \} H(\zeta, \mathbf{q})\, d\zeta\, d\mathbf{q} = \int \tilde{F}_r (p_0, \mathbf{p};\ \rho) H \{ p_0, \mathbf{p} +$$
$$+ \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - \operatorname{Re} \mathbf{k} \}\, dp_0\, d\mathbf{p}.$$

Приняв во внимание, что $m_2 > m_1$, мы можем заметить, что $\sqrt{p_0^2 - m_1^2}$ регулярен при $p_0 > m_2 > m_1$ и поэтому выражение

$$H \{ p_0, \mathbf{p} + \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - \operatorname{Re} \mathbf{k} \},$$

как функция переменных p_0, $\mathbf{p}$, также принадлежит к $C(r, s;\ 4)$. Но благодаря (A.8.6)

$$\tilde{F}_r (p_0, \mathbf{p};\ \rho) \to \tilde{F}_r (p_0, \mathbf{p}),\ \rho \to +0.$$

Имеем, следовательно,

$$\int \tilde{F}_r (p_0, \mathbf{p};\ \rho) H \{ p_0, \mathbf{p} + \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2} -\right.$$
$$\left. - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - \operatorname{Re} \mathbf{k} \}\, dp_0\, d\mathbf{p} \to \int \tilde{F}_r (p_0, \mathbf{p}) H \{ p_0, \mathbf{p} +$$
$$+ \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - \operatorname{Re} \mathbf{k} \}\, dp_0\, d\mathbf{p},$$

т. е.

$$\int \tilde{F}_r \{ \zeta, \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re} \mathbf{k} +$$
$$+ \mathbf{q};\ \rho \} H(\zeta, \mathbf{q})\, d\zeta\, d\mathbf{p} \to \int \tilde{F}_r \{ \zeta, \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} -\right.$$
$$\left. - \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q} \} H(\zeta, \mathbf{q})\, d\zeta\, d\mathbf{q}. \tag{A.8.24}$$

Так как приближение к пределу в (A.8.24) является равномерным по k (в каждой достаточно малой окрестности точки рассматриваемой области (A.8.18)), то мы можем сказать, что соотношение

$$\tilde{F}_r \{ \zeta, \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q};\ \rho \} \to$$
$$\to \tilde{F}_r \{ \zeta, \lambda(k) \mathbf{e}(k) \left(\sqrt{\zeta^2 - m_1^2} - \operatorname{Re} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right) + \operatorname{Re} \mathbf{k} + \mathbf{q} \} \tag{A.8.25}$$

имеет место в обобщенном смысле по отношению к переменным ζ, $\mathbf{q}$ равномерно по отношению к k. Совершенно такое же положение будет и с другими функциями $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_a$, входящими в выражения (А.8.22).

Построим неограниченно дифференцируемую функцию $u(\zeta)$ таким образом, что

$$u(\zeta)=0, \quad \zeta \leqslant m_2,$$
$$u(\zeta)=1, \quad \zeta \geqslant m.$$

Тогда в силу (А.8.23) мы можем в формуле (А.8.21) внести под знак интегралов правой части функции $u(\zeta)$ и $u(-\zeta)$. Возьмем еще произвольную функцию $f(\mathbf{q})$ из класса $C(r, s; 3)$ с достаточно высокими показателями r, s. Тогда в соотношениях типа (А.8.24) можем положить

$$H(\zeta, \mathbf{q})=h_+(\zeta)\, u(\pm\zeta)\frac{f(\mathbf{q})}{k_0-\zeta}$$

или

$$H(\zeta, \mathbf{q})=h_-(\zeta)\, u(\pm\zeta)\frac{f(\mathbf{q})}{k_0-\zeta},$$

поскольку степень убывания функций $h_+(\zeta)$, $h_-(\zeta)$ может быть взята достаточно большой, а знаменатель $k_0-\zeta$ не обращается в нуль в фактической области интеграции. Отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{\rho\to+0} h(k_0)\int \tilde{F}(k_0, \mathbf{k}+\mathbf{q}; \rho) f(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}$$

и потому, ввиду произвольности $h(k_0)$, существует предел

$$\lim_{\rho\to+0} \int \tilde{F}(k_0, \mathbf{k}+\mathbf{q}; \rho) f(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}. \qquad (\text{А}.8.26)$$

Нетрудно также заметить, что приближение к пределу является равномерным по отношению к k в указанном выше смысле.

Мы установили здесь факт несобственной сходимости. Усилим этот результат и покажем, что равномерно

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}; \rho)\to\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}). \qquad (\text{А}.8.27)$$

Построим в комплексных плоскостях k'_α, $\alpha=1, 2, 3$ окружности C_α с центром в точках k_α и радиусом δ. Число δ

возьмем столь малым, что все $\mathbf{k}'$ с компонентами k'_α, лежащими внутри или на границе C_α, принадлежали бы к области (А.8.18). Имеем тогда по теореме Коши:

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}+\mathbf{q};\ \rho) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{C_1 \times C_2 \times C_3} \frac{\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}'+\mathbf{q};\ \rho)}{\prod\limits_{(\alpha)} \left(k'_\alpha - k_\alpha\right)} \prod_{(\alpha)} dk'_\alpha .$$

Заменив здесь $\mathbf{k} \to \mathbf{k} - \mathbf{q}$, найдем

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k};\ \rho) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{C_1 \times C_2 \times C_3} \frac{\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}'+\mathbf{q};\ \rho)}{\prod\limits_{(\alpha)} \left(k'_\alpha - k_\alpha + q_\alpha\right)} \prod_{(\alpha)} dk'_\alpha . \tag{А.8.28}$$

Так как в этом интервале

$$|k'_\alpha - k_\alpha| = \delta,$$

то при

$$|q_\alpha| < \frac{\delta}{2}$$

знаменатель не обращается в нуль и остается по модулю бóльшим $\left(\frac{\delta}{2}\right)^3$.

Возьмем теперь какую-либо функцию $\varphi(\mathbf{q})$ вещественных переменных q_α, принадлежащую к классу $C(r, s; 3)$ с достаточно высокими показателями r, s, такую, что

$$\left.\begin{aligned} &\int \varphi(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = 1 \\ &\varphi(\mathbf{q}) = 0, \text{ если хотя бы для одного } \alpha,\ |q_\alpha| \geqslant \frac{\delta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{А.8.29}$$

Тогда из (А.8.28) получим

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k};\ \rho) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{C_1 \times C_2 \times C_3} \left\{ \int \tilde{F}(k_0, \mathbf{k}'+\mathbf{q};\ \rho) \frac{\varphi(\mathbf{q})}{\prod\limits_{(\alpha)} \left(k'_\alpha - k_\alpha + q_\alpha\right)} d\mathbf{q} \right\} \prod_{(\alpha)} dk'_\alpha . \tag{А.8.30}$$

Но ввиду (А.8.29) функция

$$f(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(\mathbf{q})}{\prod\limits_{(\alpha)} \left(k'_\alpha - k_\alpha + q_\alpha\right)}, \qquad k'_\alpha \in C_\alpha$$

переменных q_α также принадлежат к классу $C(r, s; 3)$ и мы можем применить к правой части (А.8.30) ранее установленный результат о существовании предела (А.8.26) и о равномерности соответствующего приближения.

Таким образом, убеждаемся, что в достаточно малой окрестности любой точки k из области (А.8.18) последовательность

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}; \rho)$$

аналитических функций k является равномерно сходящейся. Поэтому в силу известных теорем предельная функция

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}) = \lim_{\rho \to +0} \tilde{F}(k_0, \mathbf{k}; \rho) \tag{А.8.31}$$

будет аналитической функцией переменных k_α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, регулярной в области (А.8.18).

Замечая, что в наших рассуждениях m_1 могло бы быть взято сколь угодно близким к m, мы видим, что эта функция оказывается регулярной во всей области (А.8.1). На основании (А.8.6) убеждаемся, что для вещественных p из этой области рассматриваемая функция совпадает с $\tilde{F}_r = \tilde{F}_a$ и наша теорема теперь полностью доказана.

А.9. Доказанная в предыдущем параграфе теорема IV тривиально обобщается и на случай функций, зависящих от двух 4-векторов x_1, x_2 и параметра t. Кроме того, вместо центрально-симметричного интервала $|p_0| < m$ можно рассматривать более общий интервал $a < p_0 < b$. Тогда неравенство

$$|\operatorname{Im} \mathbf{k}|^2 < \left|\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}\right|^2,$$

естественно, должно быть заменено на

$$|\operatorname{Im} \mathbf{k}|^2 < \left|\operatorname{Im} \sqrt{\left(k_0 - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\right|^2.$$

Таким образом, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма VI. *Пусть будут даны обобщенные функции*

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) \qquad i, j = r, a,$$

удовлетворяющие условиям (А.6.5). *Пусть, кроме того,*

$$\left.\begin{aligned}\tilde{f}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0, \text{ если } \alpha < p_{10} < \beta,\\ \tilde{f}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0, \text{ если } \alpha < p_{20} < \beta.\end{aligned}\right\} \quad (\text{А.9.1})$$

Тогда существует обобщенная функция

$$\tilde{f}(k_1, k_2; t),$$

являющаяся аналитической функцией комплексных переменных k_1, k_2, *регулярной в области*

$$\left.\begin{aligned}|\operatorname{Im} \mathbf{k}_1|^2 < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(k_{10} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right|^2,\\ |\operatorname{Im} \mathbf{k}_2|^2 < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(k_{20} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}\right|^2,\end{aligned}\right\} \quad (\text{А.9.2})$$

такая, что в области вещественных p_1, p_2, *удовлетворяющих этим неравенствам,*

$$\tilde{f}(p_1, p_2; t) = \tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t).$$

Основываясь на этой лемме, а также на теореме II, докажем следующее утверждение.

Теорема V. *Если выполнены условия теоремы III, то существует такое положительное* ρ, *что «область регулярности» переменных* $z_1, \ldots, z_5$ *может быть задана неравенствами*:

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2,$$

$$|z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \quad -4\frac{M}{M+\mu}\mu^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

$$-V \leqslant \tau \leqslant \mu^2. \quad (\text{А.9.3})$$

Доказательство. Будем рассматривать раздельно два случая:

$$-V \leqslant \tau < 0, \quad (\text{А.9.4})$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \mu^2. \quad (\text{А.9.5})$$

Возьмем сначала случай (А.9.4) и применим теорему II с $\omega = 1$, $\delta = 0$. Так как все доказываемое сейчас усиление теоремы III относится только к переменной z_5, условимся выписывать здесь только неравенства, относящиеся к этой переменной.

Имеем в рассматриваемом случае

$$|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad 4a^2 \leqslant u^2, \tag{A.9.6}$$

где

$$u^2 = \left(M + \mu + \frac{M^2}{M+\mu}\right)^2 - 4M^2. \tag{A.9.7}$$

Но неравенство (A.9.6) будет удовлетворено, если

$$-u^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

С другой стороны, из (A.9.7) имеем

$$u^2 = \left(M + \mu + \frac{M^2}{M+\mu}\right)^2 - 4M^2 > \frac{4M}{M+\mu}\mu^2.$$

Итак, в случае (A.9.4) область (A.9.3) действительно входит в «область регулярности».

Перейдем теперь к рассмотрению случая (A.9.5). Возьмем достаточно малое число $\sigma > 0$ (которое впоследствии фиксируем более детально) и построим в классе $C(0, \infty, 1)$ функцию $h(t)$ такую, что

$$h(t) = 0, \qquad t \leqslant \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4} - \sigma\mu,$$

$$h(t) = 1, \qquad t \geqslant \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4}.$$

Положим

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) = f_{i,j}^{(1)}(x_1, x_2; t) + f_{i,j}^{(2)}(x_1, x_2; t),$$

где

$$f_{i,j}^{(1)} = h(t) f_{i,j}, \quad f_{i,j}^{(2)} = [1 - h(t)] f_{i,j}.$$

Докажем нашу теорему в рассматриваемом случае (A.9.5) раздельно для $f_{i,j}^{(1)}$ и $f_{i,j}^{(2)}$, поскольку тогда она окажется верной и для их суммы.

Возьмем $f_{i,j}^{(1)}$ и воспользуемся теоремой II при $\omega = 0$, $\delta = \frac{1}{2} - 2\sigma$. Заметим тогда, что область

$$-u^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

где

$$u^2 = \left[M + \mu(1+\delta) + \frac{M^2 - \mu^2}{M + \mu(1+\delta)}\right]^2 - 4M^2$$

входит в «область регулярности». Действительно,

$$u^2 = \left[2M + \frac{\mu^2(1+\delta)^2 - \mu^2}{M + \mu(1+\delta)}\right]^2 - 4M^2 >$$

$$> 4\frac{M\mu^2}{M+\mu}\,\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}\,(2\delta + \delta^2).$$

Ясно, далее, что

$$\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}\,[2\delta + \delta^2] > 1 \tag{A.9.8}$$

при $\delta = \frac{1}{2}$. Поэтому σ можно всегда взять так, чтобы (A.9.8) выполнялась и при $\delta = \frac{1}{2} - 2\sigma$. Тогда

$$u^2 > 4\frac{M\mu^2}{M+\mu}$$

и область (A.9.3) оказывается подходящей.

Нам остается рассмотреть $f^{(2)}_{i,j}$. Здесь уже мы будем использовать лемму VI. Так как

$$\tilde{f}^{(2)}_{i,j}(p_1, p_2; t) = 0, \text{ если } t < \frac{M+\mu}{2} \text{ или } t > \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4},$$

то можно ограничиться интервалом

$$\frac{M+\mu}{2} \leqslant t \leqslant \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4}. \tag{A.9.9}$$

Возьмем неравенства

$$(k_0 + t)^2 - \mathbf{k}^2 < (M+\mu)^2, \qquad (k_0 - t)^2 - \mathbf{k}^2 < (3\mu)^2. \tag{A.9.10}$$

Они, очевидно, будут выполнены, если

$$-M - \mu < k_0 + t < M + \mu, \qquad -3\mu < k_0 - t < 3\mu,$$

т. е. если

$$t - 3\mu < k_0 < M + \mu - t.$$

Таким образом, (A.9.10) справедливы при

$$\frac{M + \mu(1+\delta)}{2} - 3\mu < k_0 < M + \mu - \frac{M + \mu(1+\delta)}{2}; \ \delta = \frac{1}{2}.$$

Приняв во внимание соотношения (А.7.1), (А.7.2), убеждаемся отсюда, что условия леммы VI удовлетворяются в рассматриваемом случае при

$$\alpha = \frac{M+\mu(1+\delta)}{2} - 3\mu, \quad \beta = M+\mu - \frac{M+\mu(1+\delta)}{2}; \quad \delta = \frac{1}{2}. \tag{А.9.11}$$

Но так как в силу условий нашей теоремы функции $f^{(2)}_{i,j}$ должны быть инвариантны по отношению к пространственным вращениям, видим, что функция

$$f^{(2)}(k_1, k_2; t),$$

регулярная в области (А.9.2), может быть представлена в форме

$$\Phi^{(2)}(z_1, \ldots, z_5; t),$$

где $z_1, \ldots, z_5$ даются выражениями (А.7.17). Рассуждая как и при доказательстве теоремы II, выразим k_1, k_2 через $z_1, \ldots, z_5; t$ с помощью формул (А.7.20), (А.7.22). Тогда соответствующая область регулярности может быть задана неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} |\operatorname{Im} A|^2 + |\operatorname{Im} C|^2 &< \left|\operatorname{Im} \sqrt{\left(\frac{z_1 - z_3}{4t} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right|^2, \\ |\operatorname{Im} B|^2 + |\operatorname{Im} C|^2 &< \left|\operatorname{Im} \sqrt{\left(\frac{z_2 - z_4}{4t} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right|^2. \end{aligned}\right\} \tag{А.9.12}$$

Представим себе, что неравенства (А.9.12) справедливы для

$$z_1 = z_2 = M^2, \qquad z_3 = z_4 = \tau, \qquad z_5 = -4a^2, \tag{А.9.13}$$

где

$$a^2 \leqslant \frac{M}{M+\mu}\mu^2. \tag{А.9.14}$$

Тогда, ввиду непрерывности функций A, B, C в окрестности (А.9.13) и ограниченности интервала изменения t (А.9.9), мы всегда могли бы подобрать столь малое положительное ρ, чтобы неравенство (А.9.12) выполнялось для всех z из области (А.9.3). Тем самым наша теорема была бы доказана.

Итак, нам остается показать справедливость неравенств (А.9.12) для значений (А.9.13).

Имеем для этих значений

$$|\operatorname{Im} A|^2 \leqslant a^2; \quad |\operatorname{Im} B|^2 \leqslant a^2; \qquad \operatorname{Im} C = 0.$$

Правые же части (A.9.12) больше a^2, так как в силу (A.9.5)

$$\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\mu^2}{4} - \left(\frac{M^2 - \tau}{4t} - \frac{M}{2} + \mu\right)^2 > \frac{25}{16}\mu^2 - \left(\frac{M^2}{2M + 2\mu} - \right.$$

$$\left. - \frac{M}{2} + \mu\right)^2 = \frac{25}{16}\mu^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{M\mu + 2\mu^2}{M + \mu}\right)^2 > \mu^2 > \frac{M}{M+\mu}\mu \geqslant a^2.$$

Итак, неравенства (A.9.12) действительно выполняются для значений (A.9.13) при условии (A.9.14). Тем самым доказательство закончено.

А.10 Лемма VII. *Рассмотрим скалярные обобщенные функции трех 4-векторов*:

$$F_{i,j}(y_1, y_2, y_3) \qquad i, j = r, a, \tag{A.10.1}$$

удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} &F_{r,r}(y_1, y_2, y_3) = 0, && \text{если} \quad y_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad y_2 \lesssim 0; \\ &F_{r,a}(y_1, y_2, y_3) = 0, && \text{если} \quad y_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad y_2 \gtrsim 0; \\ &F_{a,r}(y_1, y_2, y_3) = 0, && \text{если} \quad y_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad y_2 \lesssim 0; \\ &F_{a,a}(y_1, y_2, y_3) = 0, && \text{если} \quad y_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad y_2 \gtrsim 0; \end{aligned}\right\} \tag{A.10.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde F_{r,j}(q_1, q_2, q_3) - \tilde F_{a,j}(q_1, q_2, q_3) = 0, \text{ если } (q_1+q_2)^2 < (M+\mu)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (q_1-q_3)^2 < (3\mu)^2, \\ &\tilde F_{i,r}(q_1, q_2, q_3) - \tilde F_{i,a}(q_1, q_2, q_3) = 0, \text{ если } (q_2+q_3)^2 < (M+\mu)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (q_2-q_3)^2 < (3\mu)^2, \end{aligned}\right\} \tag{A.10.3}$$

$$\tilde F_{i,j}(q_1, q_2, q_3) = 0, \text{ если } q_3^2 < \frac{(M+\mu)^2}{4} \text{ или } q_{30} < 0. \tag{A.10.4}$$

Тогда можно построить обобщенную функцию вещественной переменной z_6,

$$\Psi(z_1, \ldots, z_5; z_6),$$

являющуюся аналитической функцией комплексных переменных $z_1, \ldots, z_5$ *со свойствами*:

1°. *Ψ регулярна в области:*

$$\left.\begin{array}{l} |z_1-M^2|<\rho\mu^2,\ |z_2-M^2|<\rho\mu^2,\ |z_3-\tau|<\rho\mu^2, \\ |z_4-\tau|<\rho\mu^2,\ -\dfrac{4M}{M+\mu}\mu^2\leqslant \operatorname{Re} z_5\leqslant 0, \\ |\operatorname{Im} z_5|<\rho\mu^2\dfrac{M^2}{z_6},\qquad -V\leqslant\tau\leqslant\mu^2. \end{array}\right\} \quad (\text{A.10.5})$$

Здесь V — произвольное фиксированное положительное число, ρ — достаточно малое положительное число (зависящее от V).

$$2°.\ \Psi(z_1, \ldots, z_5;\ z_6)=0, \quad \text{если} \quad z_6<\left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2. \quad (\text{A.10.6})$$

3°. *Для вещественных q_1, q_2, q_3, для которых величины*

$$z_1=(q_1+q_3)^2, \quad z_2=(q_2+q_3)^2, \quad z_3=(q_1-q_3)^2,$$
$$z_4=(q_2-q_3)^2, \quad z_5=(q_1-q_2)^2, \quad z_6=q_3^2$$

удовлетворяют неравенствам (A.10.5), *имеем:*

$$\tilde{F}_{i,j}(q_1, q_2, q_3)=\Psi(z_1, \ldots, z_5;\ z_6), \quad \text{если} \quad q_{30}>0.$$

Доказательство. Будем сводить сделанное утверждение к лемме VI и теореме V. Рассмотрим выражения

$$\int F_{i,j}(y_1, y_2, y_3)\, e^{iq_3y_3}\, dy_3, \qquad (\text{A.10.7})$$

где $q_3=te$, а e — времениподобный единичный 4-вектор:

$$e_0>0, \quad e^2=1.$$

Совершим лоренцево преобразование таким образом, чтобы e оказался направленным по временной оси. В новой системе координат соответствующие величины условимся отмечать знаком «прим». Выражения (A.10.7) можно рассматривать как функции

$$f_{i,j}(y_1', y_2', t).$$

Нетрудно видеть, что в силу условий нашей леммы функции эти удовлетворяют всем условиям теоремы V. Поэтому мы можем построить соответствующую функцию

$$\Phi(z_1, \ldots, z_5; t),$$

в которой

$$z_1 = (q'_{10} + t)^2 - \mathbf{q}_1'^2, \quad z_2 = (q'_{20} + t)^2 - \mathbf{q}_2'^2,$$

$$z_3 = (q'_{10} - t)^2 - \mathbf{q}_1'^2, \quad z_4 = (q'_{20} - t)^2 - \mathbf{q}_2'^2, \quad z_5 = (q'_1 - q'_2)^2.$$

Ясно, однако, что

$$z_1 = (q_1 + q_3)^2, \quad z_2 = (q_2 + q_3)^3, \quad z_3 = (q_1 - q_3)^2,$$
$$z_4 = (q_2 - q_3)^2, \quad z_5 = (q_1 - q_2)^2,$$

ввиду скалярного характера этих выражений. Но

$$\Phi(z_1, \ldots, z_5; t) = 0 \quad \text{для} \quad t < \frac{M+\mu}{2}.$$

Можем поэтому ввести функцию $\Psi(z_1, \ldots, z_5; z_6)$, положив

$$\Psi(z_1, \ldots, z_5; z_6) = \Phi\left(z_1, \ldots, z_5; \sqrt{z_6}\right), \quad z_6 > 0,$$

$$\Psi(z_1, \ldots, z_5; z_6) = 0, \quad z_6 < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2.$$

Справедливость леммы VII теперь становится очевидной.

Примечание. Рассмотрим более общий случай, когда функции

$$F^{\nu}_{i,j}(y_1, y_2, y_3), \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

удовлетворяют всем условиям леммы VII, кроме условия скалярности. Вместо него предположим, что при преобразованиях L из группы Лоренца наши функции линейно преобразуются:

$$F^{\nu}_{i,j}(Ly_1, Ly_2, Ly_3) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant l} A_{\nu,\nu'}(L) F^{\nu}_{i,j}(y_1, y_2, y_3), \qquad (\text{A}.10.8)$$

с помощью некоторого представления $A(L)$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления. Отсюда будет вытекать, что $\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(q_1, q_2, q_3)$ будут линейно выражаться (с полиномиальными коэффициентами от q_i) через скалярные функции q_1, q_2, q_3, чем обеспечивается возможность применения леммы VII. Нетрудно видеть, что результаты леммы VII претерпевают здесь следующее тривиальное изменение.

Можно построить конечную систему обобщенных функций вещественной переменной z_6

$$\Psi_\lambda(z_1, \ldots, z_5; z_6), \qquad \lambda = 1, \ldots, s,$$

являющихся аналитическими функциями комплексных переменных $z_1, \ldots, z_5$ и обладающих свойствами 1°, 2°. Для вещественных q_1, q_2, q_3, для которых величины z удовлетворяют неравенствам (А.10.5), имеем представление с помощью суммы конечного числа членов типа

$$q_i^{\gamma_1} \ldots q_{i_s}^{\gamma_s} \Phi_\lambda(z_1, \ldots, z_5; z_6),$$

если при этом $q_{30} > 0$.

Отсюда вытекает наша основная

Теорема VI. *Рассмотрим трансляционно-инвариантные обобщенные функции четырех векторов*

$$F^\nu_{i,j}(x_1, \ldots, x_4)\,, \quad i = r, a \quad j = r, a \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

линейно преобразующиеся при преобразованиях L из группы Лоренца:

$$F^\nu_{i,j}(Lx_1, \ldots, Lx_4) = \sum_{1 \leqslant \nu' \leqslant l} A_{\nu,\nu'}(L) F^{\nu'}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) \quad \text{(А.10.9)}$$

с помощью некоторого представления $A(L)$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления. Предположим, кроме того, что введенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &F^\nu_{r,r}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \lesssim x_3 \ \text{или} \ x_2 \lesssim x_4, \\ &F^\nu_{r,a}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \lesssim x_3 \ \text{или} \ x_2 \gtrsim x_4, \\ &F^\nu_{a,r}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \gtrsim x_3 \ \text{или} \ x_2 \lesssim x_4, \\ &F^\nu_{a,a}(x_1, \ldots, x_4) = 0 \ \text{при} \ x_1 \gtrsim x_3 \ \text{или} \ x_2 \gtrsim x_4. \end{aligned}\right\} \quad \text{(А.10.10)}$$

Рассмотрим фурье-образы

$$\int F^\nu_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) \exp i(p_1x_1 + \ldots + p_4x_4)\, dx_1 \ldots dx_4 = \\ = \delta(p_1 + \ldots + p_4) \tilde{F}^\nu_{i,j}(p_1, \ldots, p_4).$$

Здесь

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \ldots, p_4)$$

— обобщенные функции $p_1, \ldots, p_4$, *определенные на многообразии*

$$p_1 + \ldots + p_4 = 0. \tag{A.10.11}$$

Предположим, что они удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{F}^{\nu}_{r,j}(p_1, \ldots, p_4) - \tilde{F}^{\nu}_{a,j}(p_1, \ldots, p_4) = 0 \\ \qquad \textit{при} \quad p_1^2 < (M+\mu)^2, \; p_3^2 < (3\mu)^2, \\ \tilde{F}^{\nu}_{i,r}(p_1, \ldots, p_4) - \tilde{F}^{\nu}_{i,a}(p_1, \ldots, p_4) = 0 \\ \qquad \textit{при} \quad p_2^2 < (M+\mu)^2, \; p_4^2 < (3\mu)^2, \end{array}\right\} \tag{A.10.12}$$

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \ldots, p_4) = 0, \quad \textit{если} \quad (p_1 + p_3)^2 < (M+\mu)^2,$$

$$\textit{или} \quad p_{10} + p_{30} < 0. \tag{A.10.13}$$

Тогда можно построить обобщенные функции вещественной переменной z_6:

$$\Phi_\lambda(z_1, \ldots, z_5; z_6),$$

являющиеся аналитическими функциями переменных , . . . , z_5 *со свойствами*:

1°. Φ_λ *регулярны в области* (A.10.5).

2°. $\Phi_\lambda = 0$, *если* $z_6 < (M+\mu)^2$.

3°. *Для вещественных* $p_1, \ldots, p_4$ *из многообразия* (A.10.11), *для которых величины*

$$z_1 = p_1^2, \; z_2 = p_2^2, \; z_3 = p_3^2, \; z_4 = p_4^2, \; z_5 = (p_1 + p_2)^2,$$

$$z_6 = (p_1 + p_3)^2$$

удовлетворяют неравенствам (A.10.5), *имеем представление вида*

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \ldots, p_4) = \sum p_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, p_{i_s}^{\alpha_s} \Phi_\lambda(z_1, \ldots, z_5; z_6), \tag{A.10.14}$$

$$\textit{если} \quad p_{10} + p_{30} > 0$$

с конечным числом членов в сумме.

Доказательство. Ввиду трансляционной инвариантности функций $F^{\nu}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4)$ их можно рассматривать как функции трех переменных, например:

$$y_1 = x_1 - x_3,$$
$$y_2 = x_4 - x_2,$$
$$y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Положим

$$F'^{\nu}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) = F^{\nu}_{i,j_1}(x_1 - x_3, x_4 - x_2, x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \tag{A.10.15}$$

где $j_1 = r$, если $j = a$; $j_1 = a$, если $j = r$. Ясно тогда, что функции

$$F'^{\nu}_{i,j}(y_1, y_2, y_3)$$

удовлетворяют условию (А.10.8) примечания к лемме VII, а также условиям (А.10.2). Далее, из (А.10.15) следует, что

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(q_1 + q_3, -q_2 - q_3, q_3 - q_1, q_2 - q_3) = \tilde{F}'^{\nu}_{i,j}(q_1, q_2, q_3).$$

Положив

$$p_1 = q_1 + q_3, \quad p_2 = -q_2 - q_3, \quad p_3 = q_3 - q_1, \quad p_4 = q_2 - q_3,$$

имеем

$$q_3 = \frac{p_1 + p_3}{2}, \quad p_1^2 = (q_1 + q_3)^2, \quad p_2^2 = (q_2 + q_3)^2, \quad p_3^2 = (q_1 - q_3)^2,$$
$$p_4^2 = (q_2 - q_3)^2, \quad (p_1 + p_2)^2 = (q_1 - q_2)^2.$$

Видим отсюда, что выполнены и остальные условия леммы VII. Используя сделанное к ней примечание, мы и получаем доказательство нашей основной теоремы.

Примечание. Вместо условия (А.10.13) мы можем ввести условие

$$[(p_1 + p_3)^2 - M^2]\, \tilde{F}^{\nu}_{ij}(p_1, \ldots, p_4) = 0,$$

если $\quad (p_1 + p_3)^2 < (M + \mu)^2 \quad$ или $\quad p_{10} + p_{30} < 0.$

Действительно, в этом случае вместо $F^{\nu}_{i,j}$ можем рассмотреть функции

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2-M^2\right]F^{\nu}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4),$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы VI.

Соотношение (А.10.14) окажется тогда умноженным на $[(p_1+p_3)^2-M^2]$. На этот множитель мы можем, однако, разделить в области, где

$$(p_1+p_3)^2 \neq M^2.$$

Поэтому (А.10.14) останется верным, если к условию $p_{10}+ + p_{30} > 0$ добавить $(p_1+p_3)^2 \neq M^2$.

ДОПОЛНЕНИЕ Б

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВКЛАДА ОДНОНУКЛОННОГО СОСТОЯНИЯ

Мы займемся теперь явным вычислением описывающих вклад однонуклонных состояний сумм (6.34). Нам будет достаточно вычислить только одну из них, например вторую,

$$g^2(\tau)\,A(\tau,\,\mathbf{p}) = (2\pi)^3\left(1 - \frac{E_{\mathbf{p}}(\tau)}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\right)\times$$
$$\times \sum_{S''} \langle -\mathbf{p}, S' \,|\, j_\rho(0) \,|\, -\lambda\mathbf{e}, S''\rangle \langle -\lambda\mathbf{e},\, S'' |\, j_{\rho'}(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle \big|_{E=E_{\mathbf{p}}(\tau)}, \tag{Б.1}$$

поскольку первая сумма $g^2(\tau)B(\tau,\mathbf{p})$ выражается через вторую с помощью (6.64).

Б.1. Рассмотрим сначала матричный элемент тока между двумя однонуклонными состояниями

$$\langle \mathbf{p}'',\, S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle.$$

В силу трансляционной инвариантности и определения тока (3.4) можно написать

$$e^{-i\,(p-p'')\,x}\,\langle \mathbf{p}'',\, S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle = i\left\langle \mathbf{p}'',\, S'' \left| \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \right| \mathbf{p}, S\right\rangle.$$

Переходя здесь от варьирования по $\varphi_\rho(x)$ к варьированию по $\varphi_\rho(q)$, где $\varphi_\rho(q)$ — фурье-образ для произвольных q, связанный с $\varphi_\rho(x)$ обычным соотношением

$$\varphi_\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-iqx}\varphi_\rho(q)\,dq, \qquad \text{(Б.)}$$

мы придем к формуле:

$$i\left\langle \mathbf{p}'', S'' \left| \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)} \right| \mathbf{p},\, S\right\rangle = \langle \mathbf{p}'',\, S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p},\, S\rangle\,\delta(q+p-p''). \tag{Б.3}$$

Заметим, что эта формула имеет смысл, если все составляющие векторов q, p и p'' вещественны — иначе интеграл

$$(2\pi)^{-4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-i(q+p-p'')x\}\,dx$$

не обладал бы δ-образными свойствами. Поэтому, если p и p'' соответствуют нуклонам, то вектор q обязательно должен быть пространственно-подобным, $q^2<0$. Поэтому все дальнейшее рассмотрение будет сначала справедливым только для отрицательных τ, удовлетворяющих условию (6.23).

Стоящий в левой части (Б.3) матричный элемент между однонуклонными состояниями можно преобразовать с помощью II.(3) из § 2 в вакуумное среднее третьей вариационной производной матрицы рассеяния.

Действительно, последовательная замена «протаскивания» операторов $b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})$ и $b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}'')$ через любой бозевский (т. е. четный по фермиевским полям) оператор в вариационном дифференцировании дает нам

$$\langle \mathbf{p}'', S''\,|\,B\,|\,\mathbf{p}, S\rangle=\sum_{\lambda\lambda'}\int dx\,dx'\left[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''),\overline{\psi}_{\lambda'}(x')\right]_{+}\times$$
$$\times\left[\psi_\lambda(x), b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})\right]_{+}\left\langle 0\left|\frac{\delta^2 B}{\delta\psi_\lambda(x)\,\delta\overline{\psi}_{\lambda'}(x')}\right|0\right\rangle,$$

откуда с помощью перестановочных соотношений (2.26) находим:

$$\langle \mathbf{p}'', S''\,|\,B\,|\,\mathbf{p}, S\rangle=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\overline{u^{+S''}}(\mathbf{p}'')\int dx_1\,dx_2\,e^{i(p''x_1-px_2)}\left\langle 0\left|\frac{\delta^2 B}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle u^{+S}(\mathbf{p}). \tag{Б.4}$$

Переходя еще от варьирования по $\overline{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ к варьированию по $\overline{\psi}(p)$ и $\psi(p)$ ((2.33), (2.34)), получим окончательно выражение однонуклонного матричного элемента тока через вакуумное среднее третьей вариационной производной матрицы рассеяния:

$$\langle \mathbf{p}'', S''\,|\,j_\rho(0)\,|\,\mathbf{p}, S\rangle\,\delta(q+p-p'')=-2\pi i(2\pi)^4\times$$
$$\times\sum_{\lambda\lambda'}\overline{u_{\lambda'}^{+S''}}(\mathbf{p}'')\left\langle 0\left|\frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_{\lambda'}(p'')\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi_\lambda(p)}\right|0\right\rangle u_\lambda^{+S}(\mathbf{p}); \tag{Б.5}$$
$$p^0=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\qquad p''^0=\sqrt{M^2+\mathbf{p}''^2}.$$

Б.2. Рассмотрим входящий сюда матричный элемент третьей вариационной производной. Легко сообразить, что наиболее общим выражением для него, удовлетворяющим требованиям трансляционной, лоренцевой (включая отражения) и изотопической инвариантности будет

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_{\lambda'}(p'')\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi_\lambda(p)} \right| 0 \right\rangle = \delta(p+q-q'') \times$$
$$\times \sum_{\omega_1,\,\omega_2=0,1} \left[(p''\gamma)^{\omega_1}\gamma_5(p\gamma)^{\omega_2}\right]_{\lambda'\lambda} \tau^\rho_{t''t}\, h_{\omega_1\omega_2}(p^2, p''^2, q^2), \tag{Б.6}$$

где $h_{\omega_1\omega_2}(p^2, p''^2, q^2)$ — произвольные скалярные функции, зависящие только от трех четырехмерных квадратов p^2, p''^2 и q^2.

Заметим теперь, что стоящий здесь слева матричный элемент переходит сам в себя с обратным знаком, если провести в нем дираково сопряжение и переставить затем p и p''. Выполняя подобное же преобразование в правой части, придем к равенству

$$\sum_{\omega_1,\,\omega_2=0,1} (p\gamma)^{\omega_1}\gamma_5(p''\gamma)^{\omega_2}\tau^\rho h_{\omega_1\omega_2}(p^2, p''^2, q^2) =$$
$$= -\sum_{\omega_1,\,\omega_2=1,2} (p\gamma)^{\omega_2}\gamma_5(p''\gamma)^{\omega_1}\tau^\rho h^*_{\omega_1\omega_2}(p''^2, p^2, q^2),$$

откуда следуют правила комплексного сопряжения для скалярных функций $h_{\omega_1\omega_2}$:

$$h_{\omega_1\omega_2}(p^2, p''^2, q^2) = -\overset{*}{h}_{\omega_2\omega_1}(p''^2, p^2, q^2). \tag{Б.7}$$

Нас интересует сейчас тот случай, когда импульсы p и p'' относятся к реальным однонуклонным состояниям, т. е.

$$p^2 = M^2; \quad p''^2 = M^2. \tag{Б.8}$$

Далее, спинорные амплитуды $\overline{u^{+S''}}(\mathbf{p}'')$, $u^{+S}(\mathbf{p})$, между которыми будет стоять в (Б.5) рассматриваемая вариационная производная (Б.6), удовлетворяют уравнениям Дирака (2.32):

$$\overline{u^{+S''}}(\mathbf{p}'')(\gamma p'') = \overline{u^{+S''}}(\mathbf{p})\,M; \quad (\gamma p)\,u^{+S}(\mathbf{p}) = M u^{+S}(\mathbf{p}). \tag{Б.9}$$

Поэтому в (Б.6) можно воспользоваться (Б.8), (Б.9) и написать в правой части

$$\gamma_5\tau^\rho\delta(p+q-p'')\sum_{\omega_1,\,\omega_2=0,1} M^{\omega_1}M^{\omega_2}h_{\omega_1\omega_2}(M^2, M^2, q^2).$$

Введем обозначение:

$$g(q^2)=i\frac{(2\pi)^8}{\sqrt{4\pi}}\sum_{\omega_1,\,\omega_2=0,1} M^{\omega_1}M^{\omega_2}h_{\omega_1\omega_2}(M^2, M^2, q^2). \qquad (\text{Б}.10)$$

Легко видеть, что в силу правил комплексного сопряжения (Б.7) так определенная функция $g(q^2)$ будет вещественной.

Собирая результаты, получаем, что вакуумное среднее третьей вариационной производной (Б.6) можно записать, если оно стоит между двумя спинорными амплитудами, удовлетворяющими уравнению Дирака, в виде

$$\left\langle 0\left|\frac{\delta^3 S}{\delta\bar{\psi}(p'')\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi(p)}\right|0\right\rangle=$$
$$=\frac{-i\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^8}\gamma_5\tau^\rho g(q^2)\,\delta(q+p-p''). \qquad (\text{Б}.11)$$

Подставляя (Б.11) в выражение (Б.5) для матричного элемента тока, найдем:

$$\langle \mathbf{p}'', S''|j_\rho(0)|\mathbf{p}, S\rangle=-\frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^3}g(q^2)\overline{u^{+S''}(\mathbf{p}'')}\gamma_5\tau^\rho u^{+S}(\mathbf{p});$$
$$q=p''-p. \qquad (\text{Б}.12)$$

Б.3. Подставим найденное выражение (Б.12) для матричных элементов в сумме (Б.1). Во втором матричном элементе

$$\mathbf{p}''=-\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)\,\mathbf{e}$$

(мы обозначили через $\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)$ значение λ при $E=E_{\mathbf{p}}(\tau)$). Замечая теперь, что в силу (6.18) и (6.26)

$$\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)=\sqrt{\frac{\tau^2+4M^2(-\tau-\mathbf{p}^2)}{4(M^2+\mathbf{p}^2)}}, \qquad (\text{Б}.13)$$

видим, что

$$p''^0=\frac{2M^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\;^{1)}. \qquad (\text{Б}.14)$$

Определяя составляющие вектора q из δ-функции в (Б.11), находим отсюда

$$q^2=q^{0^2}-\mathbf{q}^2=\tau. \qquad (\text{Б}.15)$$

[1]) Подчеркнем здесь еще раз, что пространственные составляющие вектора p'' (а следовательно, и q) оказываются вещественными только для положительных λ^2, т. е. все наше рассмотрение справедливо пока только для $\tau<-\mathbf{p}^2$.

Проводя аналогичные подстановки в первом матричном элементе, обнаружим, что и в нем квадрат вектора q будет равен τ.

Итак, с помощью выражения (Б.12) для матричного элемента тока из суммы (Б.1) действительно сепарируется множитель

$$g^2(\tau),$$

а для функции $A(\tau, \mathbf{p})$ мы находим выражение:

$$A(\tau, \mathbf{p}) = \frac{(\tau^{\rho}\tau^{\rho'})_{t't}}{2\pi^2}\left(1 - \frac{E_{\mathbf{p}}(\tau)}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\right) \times$$
$$\times \sum_{s''} \overline{u^{+s'}}(-\mathbf{p})\,\gamma_5\, u^{+s''}(-\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)\mathbf{e})\,\overline{u^{+s''}}(-\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)\mathbf{e})\,\gamma_5\, u^{+s}(\mathbf{p}), \tag{Б.16}$$

где мы расщепили спиновоизотопические индексы S на спиновые s и изотопические t и вынесли изотопические матрицы за знак суммирования по спиновым состояниям.

Элементарное суммирование по спинам дает нам

$$\overline{u^{+s''}}(\mathbf{p}'')\,\gamma_5 u^{+s}(\mathbf{p}) =$$
$$= \frac{-i\sigma_{s's}\,[\mathbf{p}\,(\mathscr{E}(\mathbf{p}'')+M) - \mathbf{p}''\,(\mathscr{E}(\mathbf{p})+M)]}{2\sqrt{\mathscr{E}(\mathbf{p})\,\mathscr{E}(\mathbf{p}'')\,[\mathscr{E}(\mathbf{p})+M]\,[\mathscr{E}(\mathbf{p}'')+M]}}, \tag{Б.17}$$

где через $\mathscr{E}(\mathbf{p})$ и $\mathscr{E}(\mathbf{p}'')$ обозначены соответственно

$$\mathscr{E}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2} \quad \text{и} \quad \mathscr{E}(\mathbf{p}'') = \sqrt{\mathbf{p}''+M^2}.$$

Подставляя (Б.17) в (Б.16), пользуясь перестановочными соотношениями матриц σ и выполняя несложные, но несколько громоздкие выкладки, мы получим тогда окончательно:

$$A(\tau, \mathbf{p}) = -\frac{(\tau^{\rho}\tau^{\rho'})_{t't}}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{4}\times$$
$$\times\left\{\delta_{s's}\frac{M(\tau+2\mathbf{p}^2)}{(M^2+\mathbf{p}^2)^{3/2}} + \frac{2i\lambda_{\mathbf{p}}(\tau)\,(\mathbf{p}\mathbf{e}\sigma_{s's})}{(M^2+\mathbf{p}^2)}\right\} \tag{Б.18.1}$$

и, вспоминая (6.64),

$$B(\tau, \mathbf{p}) = -P_{\rho\rho'}\,P_{\mathbf{e}}\,A(\tau, \mathbf{p}). \tag{Б.18.2}$$

Б.4. Из вида выражения (Б.18) непосредственно очевидно, что $SA(\tau, \mathbf{p})$ будет аналитической функцией τ во всей комплексной плоскости—после применения операции $\mathfrak{S}_e$ в (Б.18) останется только первый член, зависящий от τ линейно, а после применения $\mathfrak{A}_e$ — только второй, деленный на λ, который тогда вовсе не зависит от τ.

Таким образом мы, для случая $\tau < -p^2$, вывели формулы (6.34) и подтвердили необходимые свойства $A(\tau, \mathbf{p})$.

Для реального случая $\tau = m^2$ изложенные выше рассуждения провести, конечно, нельзя—как мы уже подчеркивали, при этом пространственные составляющие вектора — $\lambda\mathbf{e}$ стали бы мнимыми и сведéние к вакуумным средним вариационных производных третьего порядка стало бы невозможным. С точки зрения вывода дисперсионных соотношений это обстоятельство не составляет для нас затруднения—в § 6 мы показали аналитичность функции $g^2(\tau)$ в области (6.40), которая включает и нужное нам значение $\tau = m^2$. Однако с точки зрения физического смысла постоянной $g(m^2)$ было бы желательным установить вещественность функции $g(\tau)$ не только для τ, удовлетворяющих (6.23) (как то следовало из рассуждений в пункте Б.2), но и для реального $\tau = m^2$.

Б.5. Вернемся для этого к рассмотренному к Б.1 матричному элементу

$$\langle \mathbf{p}'', S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle,$$

который с помощью нашей обычной техники перехода от однонуклонного состояния к вакуумному можно записать в виде:

$$\langle \mathbf{p}'', S'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S \rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \overline{u_\alpha^{+S''}(\mathbf{p}'')} \int dy e^{ip''y} \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_\rho(0)}{\delta \bar{\psi}_\alpha(y)} \right| \mathbf{p}, S \right\rangle; \qquad (Б.19)$$
$$p''^0 = \sqrt{\mathbf{p}''^2 + M^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$F^{\text{ret}}_{\alpha\rho}(y) = \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_\rho(0)}{\delta \bar{\psi}_\alpha(y)} \right| \mathbf{p}, S \right\rangle = i \left\langle 0 \left| \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\alpha(y)} \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(0)} S^+ \right) \right| \mathbf{p}, S \right\rangle, \qquad (Б.20)$$

фурье-образу

$$\tilde{F}^{\,t}(\mathbf{p}''; \mathbf{p}, S) = \int e^{ip''y} F^{\text{ret}}_{\alpha\rho}(y)\, dy \qquad (Б.21)$$

которой пропорционален интересующий нас матричный элемент (Б.19) и,—так же, как мы поступали в выкладках § 7, — вспомогательную функцию

$$F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\rho}(y) = -\left\langle 0 \left| \frac{\delta \frown_\alpha(y)}{\delta\varphi_\rho(0)} \right| \mathbf{p}, S \right\rangle. \qquad (\text{Б}.22)$$

Значки ret и adv указывают здесь на то, что в силу условия причинности

$$\left.\begin{aligned} &F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\rho}(y) = 0 \quad \text{для} \quad y^2 < 0 \quad \text{или} \quad y^0 < 0 \\ \text{и}\quad &F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\rho}(y) = 0 \quad \text{для} \quad y^2 < 0 \quad \text{или} \quad y^0 > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Б}.23)$$

Как было показано в п. 7.3, разность этих функций можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\rho}(y) - F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\rho}(y) &= i\langle 0 \,|\, [\frown_\alpha(y), j_\rho(0)]_- \,|\, \mathbf{p}, S\rangle = \\ &= -i \sum_n \int d\mathbf{k}\, \langle 0 \,|\, j_\rho(0) \,|\, n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} \,|\, \frown_\alpha(y) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle + \\ &+ i \sum_n \int d\mathbf{k}\, \langle 0 \,|\, \frown_\alpha(y) \,|\, n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} \,|\, j_\rho(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle = \\ &= F^1(y) + F^2(y). \end{aligned} \qquad (\text{Б}.24)$$

Рассмотрим по отдельности фурье-образы каждого из членов правой части (Б.24). Используя трансляционную инвариантность, получаем для первого фурье-образа

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^1(p''; \mathbf{p}, S) &= \\ &= -i \sum_n \int d\mathbf{k}\, \langle 0 \,|\, j_\rho(0) \,|\, n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} \,|\, \frown_\alpha(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle \times \\ &\times \int e^{i(p''+k-p)y}\, dy = -(2\pi)^4 i \sum_n \int d\mathbf{k}\, \delta(p'' + k - p) \times \\ &\times \langle 0 \,|\, j_\rho(0) \,|\, n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k} \,|\, \frown_\alpha(0) \,|\, \mathbf{p}, S\rangle, \end{aligned}$$

где в силу обычных аргументов

$$k_n^0 > 0, \qquad k_n^2 \geqslant (3m)^2.$$

Таким образом, фурье-образ $\tilde{F}^1$ первого члена отличен от нуля лишь для p'', удовлетворяющих неравенствам:

$$p^0 - p''^0 > 0 \quad \text{и} \quad (p-p'')^2 \geqslant (3m)^2.$$

Аналогично, рассмотрение фурье-образа $\tilde{F}^0$ второго члена (Б.24) показывает, что он отличен от нуля только для значений p'', удовлетворяющих неравенствам

$$p''^0 > 0 \quad \text{и} \quad p''^2 \geqslant (M+m)^2.$$

Таким образом, мы видим, что фурье-образ разности (Б.24) обладает свойством

$$\tilde{F}^{\text{ret}}(p'') - \tilde{F}^{\text{adv}}(p'') = 0, \tag{Б.25}$$

если одновременно выполняются неравенства

$$\left.\begin{array}{lll} & p^0 - p''^0 < 0 \quad \text{или} & (p-p'')^2 < (3m)^2 \\ \text{и} & & \\ & p'' < 0 \quad \text{или} & p''^2 < (M+m)^2. \end{array}\right\} \tag{Б.26}$$

Эти неравенства выполнятся, если потребовать одновременного выполнения

$$\left.\begin{array}{lll} p''^0 > p^0 & \text{или} & -3m + p^0 < p''^0 < 3m + p^0 \\ \text{и} & & \\ p''^0 < 0 & \text{или} & -(M+m) < p''^0 < (M+m), \end{array}\right\} \tag{Б.27}$$

что, как легко видеть, сводится к требованию, чтобы p''^0 лежало бы в интервале

$$p^0 - 3m < p''^0 < M + m. \tag{Б.28}$$

Итак, для фурье-образов (Б.24) выполняется (Б.25), коль скоро p''^0 удовлетворяет (Б.28). Поэтому мы можем воспользоваться теоремой IV (п. 8 дополнения А) и леммой VI (п. 2 дополнения А), утверждающими, что если разность фурье-образов запаздывающей и опережающей функций, т. е. двух функций, удовлетворяющих условиям (Б.23), обращается в нуль в некотором интервале

$$\alpha < p''^0 < \beta \tag{Б.29}$$

значений временнОй составляющей импульса, то существует аналитическая функция $\tilde{F}(q)$ комплексного 4-вектора q, регулярная в области

$$|\operatorname{Im}\overline{\mathbf{q}}| < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(q^0 - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}\right|, \qquad (\text{Б}.30)$$

такая, что для вещественных $q = p''$ из этой области

$$\widetilde{F}(p'') = \widetilde{F}^{\text{ret}}(p'') = \widetilde{F}^{\text{adv}}(p'').$$

В применении к нашему случаю, когда роль интервала (Б.29) играет интервал (Б.28), область регулярности $\widetilde{F}(q)$ будет определяться неравенством:

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\tau^2 + 4M^2(-\tau - \mathbf{p}^2)}{4(M^2 + \mathbf{p}^2)}}\right| <$$

$$< \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(\frac{2M^2 - \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} - \frac{M + \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}{2} + m\right)^2 - \left(\frac{M - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}{2} + 2m\right)^2}\right|, \qquad (\text{Б}.31)$$

где мы воспользовались значениями (Б.13), (Б.14) составляющих (Б.31) 4-вектора p''. Для τ, удовлетворяющих (6.23), корень в левой части (Б.31) будет вещественным; поэтому такие τ войдут в область аналитичности функции $\widetilde{F}(p'')$. Покажем, что $F(p'')$ будет аналитической и для τ из интервала

$$-m^2 \leqslant \tau \leqslant m^2, \qquad (\text{Б}.32)$$

включающего и реальное значение $\tau = m^2$.

Заметим для этого, что подкоренное выражение в правой частн (Б.31) можно записать как

$$-\left(m + \frac{2M(\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} - M) + \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}\right)\left(3m - \frac{2\mathbf{p}^2 - \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}\right),$$

откуда в силу неравенств (Б.32) и (6.42), ограничивающих значения τ и $\mathbf{p}^2$, будет следовать, что квадрат правой части (Б.31) будет больше, чем

$$3m^2\left(1 - \frac{3m}{2M} - \frac{m^2}{2M^2}\right).$$

С другой стороны, квадрат левой части (Б.31) будет, как легко видеть, меньше, чем

$$2m^2\left(1 + \frac{m^2}{8M^2}\right).$$

Тем самым выполнение неравенства (Б.31) для τ из интервала (Б.32) показано.

Таким образом, функция $\tilde{F}^{\text{ret}}(p'')$, определенная соотношением (Б.21), и отличающаяся от матричного элемента (Б.19) лишь множителем

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_\alpha^{+S''}(\mathbf{p}''),$$

может быть аналитически продолжена по переменной τ от отрицательных τ, удовлетворяющих (6.23), до точки $\tau = m^2$. Замечая теперь, что в силу (Б.12) и (Б.19—21) функция $\tilde{F}^{\text{ret}}_{\alpha\rho}(p''; \mathbf{p}, S)$ отличается от функции $g(q^2) = g(\tau)$ лишь не зависящими от τ матричными множителями, мы приходим к тому важному заключению, что *функция $g(\tau)$ также может быть аналитически продолжена по переменной τ вплоть до точки* $\tau = m^2$. Поэтому мы получаем возможность сослаться на теорему из теории функций комплексного переменного, утверждающую, что если некоторая аналитическая функция принимает чисто вещественные значения на каком-либо отрезке вещественной оси (внутри области аналитичности), то она будет вещественна и *во всех* точках вещественной оси, расположенных внутри области аналитичности. Поскольку вещественность $g(\tau)$ для τ, удовлетворяющих (6.23), была показана в разделе Б.2, то из только что доказанной возможности аналитически продолжить $g(\tau)$ вплоть до точки $\tau = m^2$ следует, что функция

$$g(\tau) \text{ вещественна для } \tau = m^2. \qquad (\text{Б.33})$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Kronig, J., Opt. Soc. Am. 12, 547 (1926).
[2] H. A. Kramers, Atti Congr. Intern. Fisici, Como 2 (1927), 545.
[3] W. Heisenberg, Die «beobachtbaren Größen» in der Theorie der Elementarteilchen, Zs. f. Phys. **120** (1943), 513, 673; Zs. f. Naturforschung 1 (1946), 608.
[4] Ning Hu, On the Application of Heisenbergs Theory of *S*-matrix to the Problems of Resonance Scattering and Reactions in Nuclear Physics, Phys. Rev. **74** (1948), 131.
[5] N. G. van Kampen, *S*-matrix and Causality Condition I, Maxwell Field, Phys. Rev. **89** (1953), 1072; *S*-matrix and Causality Condition II., Nonrelativistic Particles, Phys. Rev. **91** (1953), 1267.
[6] М. Г. Крейн, Об определенин потенциала частицы по ее *S*-функции, ДАН **105** (1955), 433.
[7] C. J. Goebel, R. Karplus & M. A. Ruderman, Momentum Dependence of Phase Shifts, Phys. Rev. **100** (1955), 240.
[8] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger & W. E. Thirring, Use of Gausality Gondition in Quantum Theory, Phys. Rev. **95** (1954), 1612.
[9] M. L. Goldberger, Use of Causality Conditionin Quantum Theory, Phys. Rev. **97** (1955), 508.
[10] R. Karplus & M. A. Ruderman, Application of Causality to Scattering, Phys. Rev., **98** (1955), 771.
[11] M. L. Goldberger, Causality Conditions and Dispersion Relations. I. Boson Fields, Phys. Rev. **99** (1955), 979.
[12] M. L. Goldberger, H. Miyazawa & R. Öhme, Application of Dispersion Relations to Pion-Nucleon Scattering, Phys. Rev. **99** (1955), 986.
[13] R. Öhme, Dispersion Relations for Pion-Nucleon Scattering I, The Spin-Flip Amplitude, Phys. Rev. **100** (1955), 1503.
[14] R. Öhme, Dispersion Relations for Pion — Nicleon Scattering: No-Spin-Flip Amplitude, Phys. Rev. **102** (1956), 1174.
[15] Дисперсионные соотношения. Проблемы современной физики, № 2 (1957).
[16] Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Вопросы квантовой теории поля; I. Матрица рассеяния; II. Устранение расходимостей из матрицы рассеяния, УФН **55** (1955), 149; **57** (1955), 3; Введение в теорию квантованных полей, М. Гостехиздат, 1957.
[17] R. Haag, On Quantum Field Theories, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, № 12 (1955).

[18] A. Klein, Scattering Matrix in the Heisenberg Representation for a System with Bound States, Prog. Theor. Phys. **14** (1955), 580.

[19] H. Lehmann, Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder, Nuovo Cimento **11** (1954), 342.

[20] G. Källén, On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics, Helvetica Phys. Acta 25 (1952), 417.

[21] Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук, О точечном взаимодействии в квантовой электродинамике, ДАН СССР **102**, 489 (1955).

[22] Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М. Гостехиздат, 1957, § 50.3.

[23] K. Symanzik & D. Jost, Доклад на конференции в Сиаттле (сентябрь 1956).

[24] M. L. Goldberger, F. E. Low, G. F. Chew & Y. Nambu, Доклад на конференции в Сиаттле (сент. 1956).

[25] А. А. Логунов и А. Н. Тавхелидзе, Дисперсионные соотношения для реакций фоторождения π-мезонов на нуклоне, ЖЭТФ **32** (1957), 1393.

[26] Н. Н. Боголюбов, В. Л. Бонч-Бруевич и Б. В. Медведев, К инвариантному построению квантовой теории поля, ДАН СССР **75**, 681 (1950).

[27] Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров, Об аналитическом продолжеиии обобщенных функций, Известия АН СССР, сер. математ. **22**, 15 (1957); В. С. Владимиров, О расширении области аналитичности, препринт ОИЯИ (1958).

[28] Н. Н. Боголюбов, С. М. Биленький и А. А. Логунов, Дисперсионные соотношения для слабых взаимодействий, Nuclear Physics (в печати).

[29] R. Jost & H. Lehmann, Integral darstellung Kausaler Kommutatoren, Nuovo Cimento **5**, 1598 (1957).

[30] M. Goldberger, Y. Nambu & R. Oehme, Dispersion Relations for Nucleon-Nucleon Scattering, Annals of Physics **2**, 226 (1957).

[31] А. Логунов и Тавхелидзе, Generalized Dispersion Relations, Nuclear Physics (в печатн).

[32] А. Логунов, К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов. Nuclear Physics (в печати).

[33] T. W. Kibble, Dispersion Relations for Inelastic Scatering, Proc. Roy. Soc. **244**, 355 (1958).

[34] H. J. Bremmermann, R. Oehme & J. G. Taylor, Proof of Dispersion Relations in Quantized Field Theory, Phys. Rev. **109**, 2178 (1958).

[35] F. J. Dyson, Integral Representation of Causal Commutators (препринт).

СОДЕРЖАНИЕ